Ciência & Educação, Bauru, v. 30, e24030, 2024
https://doi.org/10.1590/1516-731320240030
ARTIGO ORIGINAL

O GeoGebra no ensino de Álgebra Abstrata: uma abordagem dos grupos diedrais via Engenharia Didática

GeoGebra in the teaching of Abstract Algebra: An approach to dihedral groups through Didactic Engineering

Renata Teófilo de **Sousa**[1]
Francisco Régis Vieira **Alves**[2]
Ana Paula Florêncio **Aires**[3]

[1]Secretaria de Educação do Estado do Ceará; Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Programa de Pós-Graduação em Ensino da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN), Fortaleza, CE, Brasil.
Autora Correspondente: renata.sousa1@prof.ce.gov.br

[2]Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará, Departamento de Matemática e Física, Fortaleza, CE, Brasil.

[3]Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Departamento de Matemática; Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (CIDTFF), Universidade de Aveiro, Portugal.

Resumo: Este estudo aborda o ensino de grupos diedrais finitos, sua importância em diversas áreas, dificuldades dos estudantes de licenciatura no tema e a escassez de trabalhos sobre a temática. O objetivo é apresentar uma proposta para explorar as propriedades algébricas de rotações e reflexões em grupos diedrais com o aporte do GeoGebra. A abordagem fornece suporte teórico ao professor na compreensão e no ensino de sua estrutura algébrica e propriedades por uma perspectiva visual, a partir de uma situação didática apoiada em uma construção no software. A metodologia adotada foi a Engenharia Didática e a sessão de ensino foi estruturada seguindo as dialéticas da Teoria das Situações Didáticas. Almeja-se que a proposta apresentada contribua para a possível integração do GeoGebra ao ensino de Álgebra Abstrata, considerando a potencial contribuição de uma abordagem visual do tema na prática docente.

Palavras-chave: Ensino de matemática; Ensino superior; GeoGebra; Ensino de álgebra; Engenharia didática.

Abstract: This paper investigates the teaching of finite dihedral groups, their importance in various domains, undergraduate students' difficulties in the subject, and the lack of available literature. The proposal aims to explore the algebraic characteristics of reflections and rotations in dihedral groups using support from GeoGebra. The approach provides theoretical support for the teacher in understanding and teaching its algebraic structure and properties from a visual perspective, supported by a didactic situation. The methodology adopted was didactic engineering, and the teaching session followed the dialectics of the Theory of Didactic Situations. We anticipate that integrating GeoGebra into the teaching of Abstract Algebra will offer significant benefits, considering the potential contribution of a visual approach to the topic in teaching practice.

Keywords: Mathematics teaching; Higher education; GeoGebra; Algebra teaching; Didactic engineering.

Recebido: 20/03/2024
Aprovado: 27/04/2024

e-ISSN 1980-850X.

Introdução

O estudo dos Grupos de Simetrias é imprescindível em diversas áreas, possuindo muitas aplicações práticas. Seu estudo em Teoria dos Grupos oferece exemplos que enriquecem a compreensão das estruturas algébricas e contribuem para o desenvolvimento de conceitos essenciais, como subgrupos e homomorfismos (Carter, 2009; McClain, 2009; Sinclair *et al*., 2018).

No caso deste trabalho, restringir-nos-emos ao estudo dos grupos diedrais finitos, sendo este um tipo particular de grupo de simetrias associado a figuras geométricas, especialmente polígonos. Esses grupos capturam as simetrias que preservam as propriedades de um polígono regular em relação a rotações e reflexões e possuem uma relação intrínseca com a Geometria, ao descrever simetrias em polígonos regulares e sólidos platônicos. Dada esta característica, se tornam importantes em outras áreas como a Física, na descrição de simetrias em moléculas, cristais e sistemas físicos complexos, especialmente na mecânica quântica (Carter, 2009; Monteiro; Moura; Fonseca, 2019).

Mesmo sendo um tema que abrange outros campos do conhecimento para além da matemática, é ainda pouco discutido. Após pesquisas em bases de dados, encontramos um número restrito de trabalhos sobre o ensino deste tema voltado para a formação inicial do professor de matemática. E uma limitação mais acentuada ocorreu ao buscarmos trabalhos com a associação dos grupos diedrais ao uso do GeoGebra, o que nos motivou a construir esta proposta didática.

O objetivo deste trabalho é fornecer uma proposta de ensino com uma abordagem visual de grupos diedrais direcionada para a licenciatura em matemática, com o aporte do software GeoGebra. Para estruturá-la, utilizamos a Teoria das Situações Didáticas (TSD) (Brousseau, 2002) como norteadora no planejamento de uma sessão de ensino, e a Engenharia Didática (ED) (Artigue, 2014) como metodologia de pesquisa, dada a estreita relação entre ambas, bem como o seu berço de origem, que é a Didática da Matemática francesa (Alves, 2017).

Alves e Catarino (2017, p. 133) explicam que "[...] o design de investigação característico de uma ED possibilita uma prática de intervenção controlada, assumindo a relevância do entendimento pormenorizado dos fenômenos ensino-aprendizagem". Nesse sentido, a ED possibilita uma evolução no design de investigação e, sobretudo, neste trabalho, direcionado para o Ensino de Matemática no âmbito da licenciatura, em que o professor-investigador pode articular diferentes conhecimentos em situações práticas e realizar planejamentos experimentais mais precisos e bem elaborados.

No estudo dos grupos diedrais podemos observar que existem relações ou combinações que podem ser visualizadas a partir do concreto, o que seria um facilitador nos processos de ensino e aprendizagem do tema (Monteiro; Moura; Fonseca, 2019). A partir da possibilidade da visualização e dada a limitação de investigações sobre o tema, como mencionado, propomos o uso do GeoGebra para a sua abordagem, pois "[...] o GeoGebra enquanto recurso tem potencial para agregar à prática docente do professor, facilitando seu trabalho, principalmente no que diz respeito à apresentação de conteúdos de complexa assimilação" (Sousa; Santiago; Alves, 2022, p. 35).

Este trabalho é um recorte de uma pesquisa de doutorado vinculada ao Programa de Pós-graduação Rede Nordeste de Ensino (RENOEN), polo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), campus Fortaleza, e discute as possibilidades de abordagem pedagógica de grupos finitos a partir do componente da visualização e da construção de situações didáticas para o ensino de Álgebra Abstrata nas licenciaturas, em especial na formação inicial do professor de matemática.

A partir do exposto, nas seções e subseções seguintes trazemos o delineamento das duas primeiras fases da Engenharia Didática – análises preliminares e a priori – dado o caráter teórico desta proposta didática.

Metodologia: Engenharia Didática

Artigue (2014) explicita que a Engenharia Didática (ED) se caracteriza por um esquema experimental, embasado em realizações didáticas no âmbito da sala de aula, ou seja, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Ela é dividida em quatro fases, que são: (i) análises preliminares; (ii) concepção e análise a priori, (iii) experimentação, e; (iv) análise a posteriori e validação.

Como mencionado anteriormente, dado o caráter de pesquisa em andamento deste trabalho, delimitamo-nos às duas primeiras fases da ED nas subseções que se seguem.

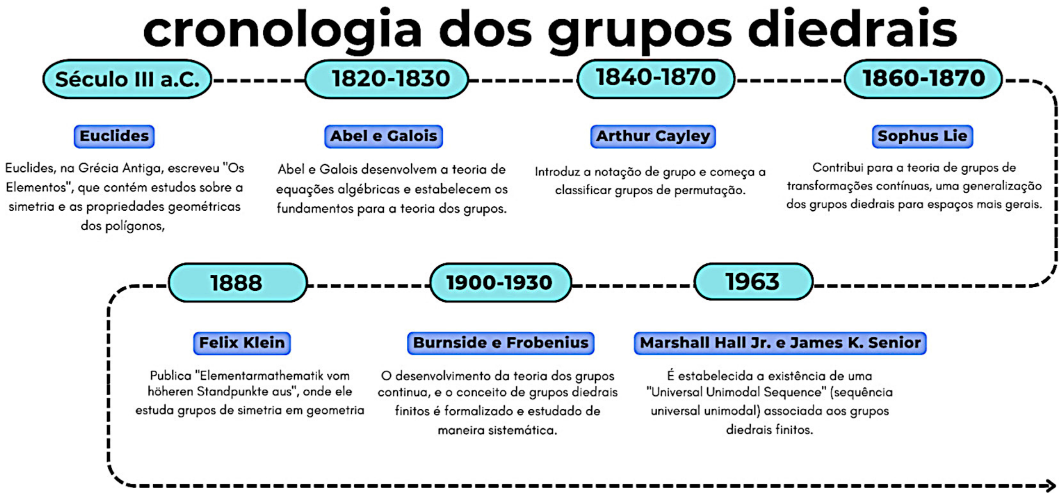
Análises preliminares: breve história e epistemologia dos Grupos Diedrais

Em uma análise preliminar no contexto da ED, o foco é compreender o estado atual de um determinado conhecimento matemático, verificando como as concepções dos estudantes têm se consolidado, como se encontra o panorama de ensino e uma visão geral do ponto de vista histórico, epistemológico e didático do tema (Almouloud; Silva, 2012; Artigue, 2014). Com base neste levantamento, o investigador visa desenvolver propostas de ensino mais alinhadas às necessidades dos estudantes e em conformidade com as condições em que o tema será desenvolvido no contexto da sala de aula.

No caso deste trabalho, realizamos uma breve revisão bibliográfica do tema, analisando o que já foi escrito por pesquisadores na área, no tocante ao processo histórico-evolutivo dos grupos diedrais, bem como um panorama epistemológico acerca de sua abordagem no âmbito da formação inicial. Ao mesmo tempo procuramos também verificar se existem investigações que envolvem a articulação entre os grupos diedrais e o GeoGebra.

Do ponto de vista histórico, a criação dos grupos diedrais está relacionada ao desenvolvimento da Teoria dos Grupos e à compreensão da simetria em Geometria. Construímos uma linha do tempo (**figura 1**), com as principais contribuições matemáticas que embasam a sua criação e desenvolvimento:

Figura 1 – Cronologia histórico-evolutiva dos grupos diedrais



Fonte: Elaboração dos autores.

A evolução histórica dos grupos diedrais está intrinsecamente ligada ao desenvolvimento mais amplo da Teoria dos Grupos e à compreensão dos conceitos e propriedades das simetrias (Kleiner, 2007). As contribuições de vários matemáticos ao longo do tempo fundamentaram a formalização e o estudo sistemático deste tema, bem como seus contextos de aplicação (Curtis, 1999; Miller, 1964; Wussing, 2007).

Embora esses matemáticos não tenham especificamente introduzido os grupos diedrais em sua forma moderna, suas contribuições para a Teoria dos Grupos e a compreensão da simetria foram cruciais para o desenvolvimento desses conceitos ao longo do tempo. O termo *diedral* deriva do grego *di-* (dois) e *hedra* (base ou face), referindo-se à simetria de um poliedro em relação a dois lados opostos.

No que tange à abordagem epistemológica dos grupos diedrais, esta pode ser explorada por meio dos trabalhos de diversos matemáticos que contribuíram ao longo do tempo para o desenvolvimento da Teoria dos Grupos, da Álgebra Abstrata e da Geometria. Como explica Eves (2002, p. 536):

> O estudo dos grupos começou essencialmente com Galois; foi ele o pioneiro no uso (1930) da palavra "Grupo" em seu sentido técnico. As pesquisas em teoria dos grupos foram então levadas adiante por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e outros que o sucederam, para o caso particular de grupos de substituições. Com o subsequente notável trabalho de Arthur Cayley (1821-1895), Ludwig Sylow (1832-1918), Sophus Lie, Georg Frobenius (1848-1917), Felix Klein, Henri Poincaré (1854-1912), Otto Holder (1859-1937) e outros, o estudo dos grupos assumiu sua forma abstrata independente e se desenvolveu rapidamente. A noção de Grupo veio a alcançar um grande papel codificador em Geometria [...] e em Álgebra Abstrata no século XX. A teoria dos grupos ainda é, nesta segunda metade do século XX, um campo de pesquisas muito produtivo em Matemática.

Seguindo o percurso histórico apresentado por Eves (2002), bem como tomando por base a análise histórico-epistemológica de Brandemberg (2009), podemos mencionar alguns fatos que compõem a construção evolutiva da Teoria dos Grupos e, de modo associado, de nosso objeto de discussão dentro desta teoria, que são os grupos diedrais.

Ciên. Educ., v. 30, e24030, 2024

Évariste Galois (1811-1832), embora não tenha abordado diretamente os grupos diedrais, apresentou contribuições fundamentais para o desenvolvimento da Álgebra Abstrata; já Arthur Cayley (1821-1895) desempenhou um papel importante na formalização dos grupos, introduzindo representações matriciais e contribuindo para a Teoria dos Grupos de Simetrias. Continuando este percurso, temos Felix Klein (1849-1925), que trabalhou em Geometria e Teoria dos Grupos e suas ideias sobre simetria e transformações influenciaram a compreensão dos grupos diedrais (Brandemberg, 2009; Curtis, 1999).

Sophus Lie (1842-1899) trouxe contribuições significativas para a Teoria dos Grupos de Lie, que são uma generalização dos grupos diedrais para espaços mais gerais e seu trabalho foi crucial para a compreensão de simetrias contínuas (Kleiner, 2007). E, dando sequência, temos James Joseph Sylvester (1814-1897), que contribuiu para a teoria dos invariantes e trabalhou com grupos de simetria, com estudos voltados para aspectos algébricos relacionados a estes grupos (Brandemberg, 2009; Eves, 2002).

Esses autores abordaram ao longo do tempo diferentes aspectos da Teoria dos Grupos e contribuíram para o conhecimento acerca dos grupos diedrais, no que diz respeito à evolução do conhecimento matemático relacionado a estes. Para um maior aprofundamento, recomendamos a leitura de seus trabalhos, pois estas podem proporcionar uma compreensão mais profunda da epistemologia desse tópico na matemática.

Acerca de sua abordagem na formação inicial, buscamos na literatura os trabalhos com o tema nos últimos dez anos e encontramos Monteiro, Moura e Fonseca (2019) e o trabalho de Dias e Noguti (2023). Ressaltamos que nesta busca não encontramos abordagem do tema grupos diedrais associado ao uso do GeoGebra. Um trabalho um pouco mais antigo surgiu na busca, ao excluirmos o interstício estabelecido, que foi o artigo de Alves e Araújo (2013). Apesar de apresentar uma abordagem com uso de tecnologias, o recurso utilizado foi o software *CAS Maple* e a pesquisa não foi direcionada para a sala de aula como abordagem didática, mas sim a apresentação de exemplos de grupos simétricos de permutações com base no software. Ressaltamos também que não há modelo de visualização geométrica neste trabalho.

Monteiro, Moura e Fonseca (2019) sugerem uma proposta concreta para o ensino de grupos diedrais, sem o uso de tecnologias. Os autores justificam o seu estudo com o fato de que "[...] os estudantes têm sérias dificuldades cognitivas e afetivas com Álgebra Abstrata, ou seja, eles têm dificuldades em se tornar competentes e, mesmo entre os que obtêm sucesso, muitos não conseguem ver o objetivo em estudar tal assunto" (Monteiro; Moura; Fonseca, 2019, p. 59). Também apresentam a abordagem visual de conceitos e sugestões de aplicações do tema.

Dias e Noguti (2023) investigaram os distanciamentos e aproximações entre a Álgebra Acadêmica e a Álgebra Escolar nos Projetos Pedagógicos dos Cursos de Licenciatura em Matemática nas Universidades Federais do Rio Grande do Sul. Dentre as sete universidades, apenas uma contempla o tema grupos diedrais na ementa da disciplina de Álgebra Abstrata.

Os estudantes da licenciatura por vezes enfrentam desafios ao estudar os grupos diedrais em Teoria dos Grupos, dada a natureza abstrata e algébrica do tema (Carlson, 2004; Monteiro; Moura; Fonseca, 2019; Wasserman, 2016). Ainda com base em Monteiro, Moura e Fonseca (2019) e Dias e Noguti (2023), tem-se que as principais dificuldades na compreensão deste tema podem ser: (a) a compreensão abstrata dos conceitos de grupo e suas propriedades; (b) a notação específica e a terminologia de grupos; (c) o entendimento das simetrias geométricas representadas pelos grupos diedrais sem uma representação visual clara; e (d) falta de conexão do tema com aplicações práticas no âmbito da licenciatura, o que pode reduzir o interesse e a compreensão do assunto.

Partindo deste panorama, temos o intuito de propor o software GeoGebra como ferramenta para o estudo do tema, propiciando a visualização, a manipulação e a compreensão das peculiaridades e propriedades dos grupos diedrais, visando desenvolver a articulação Álgebra-Geometria com ênfase na produção de uma situação didática para o ensino deste tema na licenciatura em matemática.

Diversos autores defendem o uso do GeoGebra no que diz respeito à visualização e, dentre eles, mencionamos Alves (2019), Bairral e Barreira (2017), e Mathias, Silva e Leivas (2019). Bairral e Barreira (2017, p. 52) afirmam que "[...] a visualização e a representação são evidenciadas como uma das potencialidades dos ambientes de geometria dinâmica, como o GeoGebra".

De acordo com Alves (2019), considerando as capacidades do software GeoGebra para solucionar problemas, realizar manipulações, visualizar e compreender conceitos, os professores têm a oportunidade de incentivar a participação ativa dos alunos em uma exploração dinâmica de propriedades numéricas, algébricas e geométricas, contribuindo para o desenvolvimento educacional. Mathias, Silva e Leivas (2019) complementam afirmando que o GeoGebra é um ambiente peculiar e pode proporcionar ao utilizador "[...] a manipulação e a animação das construções realizadas, de forma que não percam suas propriedades inerentes. Além disso, é possível obter a sua posterior visualização, a fim de perceber possíveis generalizações" (Mathias; Silva; Leivas, 2019, p. 63).

Para melhor compreensão da proposta didática deste artigo e seu ensino associado ao uso do GeoGebra, apresentamos algumas definições e propriedades matemáticas na subseção que segue.

Grupos diedrais e suas propriedades

O grupo diedral denotado por D_n é um tipo específico de grupo de simetria associado a um polígono regular com n lados, e consiste em $2\mathrm{n}$ elementos, sendo formado por rotações e reflexões do polígono. Apresentamos sua definição com base em Garcia e Lequain (2015) e Dillon (2018):

Definição. Seja R_k a rotação de $\frac{360°}{n}$ graus, no sentido anti-horário em torno do centro de um polígono, em que k é um inteiro tal que $0 \leq \mathrm{k} < \mathrm{n}$. Então, D_n inclui as seguintes operações:

(a) *Rotações*: $\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots, \mathrm{R}_{\mathrm{n}-1}$
(b) *Reflexões*: $\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \ldots, \mathrm{S}_{\mathrm{n}-1}$

- S_0 é uma reflexão em relação a um eixo passando pelo centro do polígono.
- S_k é uma reflexão em relação a um eixo que passa pelo vértice do polígono correspondente à rotação R_k.

As operações de rotação formam um subgrupo cíclico C_n de D_n, enquanto as operações de reflexão formam um subgrupo de ordem 2. O produto entre duas rotações ou duas reflexões resulta em uma outra rotação ou reflexão; já o produto entre uma rotação e uma reflexão pode resultar em uma reflexão ou uma rotação, dependendo da ordem. Em termos algébricos, podemos escrever o grupo diedral D_n como:

$$D_n = \langle R, S \mid R^n = S^2 = (RS)^2 = e \rangle$$

onde R representa uma rotação e S representa uma reflexão. Neste caso, D_n tem ordem $2n$, consistindo em n rotações e n reflexões.

Podemos demonstrar algebricamente que D_n satisfaz as propriedades de um grupo para a operação $\circ$ (composição):

a. *Associatividade*: Para todo $a, b, c \in D_n$, a operação $(a \circ b) \circ c$ é igual a $a \circ (b \circ c)$. Em D_n, as operações são composições de rotações e reflexões, que são associativas por natureza. Portanto, a associatividade é herdada das operações fundamentais;

b. *Existência de Elemento Neutro*: Existe um elemento neutro e em D_n tal que, para qualquer $a \in D_n$, $a \circ e = e \circ a = a$. Em D_n, a rotação identidade (R_0) serve como o elemento neutro, pois $R_k \circ R_0 = R_0 \circ R_k = R_k$, $\forall\ k \in D_n$;

c. *Existência de Inverso*: Cada elemento em D_n possui um inverso tal que, para $a \in D_n$ existe $a^{-1} \in D_n$, de modo que $a^{-1} \circ a = a^{-1} = e$. Para as rotações em D_n, o inverso é a rotação no sentido oposto ($R_{n\text{-}k}$), e para reflexões, o inverso é o próprio elemento ($S_k^{-1} = S_k$);

d. *Fechamento*: Para todo $a, b, \in D_n$, a operação $a \circ b$ deve resultar em um elemento c, tal que $c \in D_n$. As composições de rotações e reflexões em D_n resultam em rotações ou reflexões que também pertencem a D_n, garantindo o fechamento.

Logo, D_n satisfaz todas as propriedades necessárias para ser considerado um grupo.

Ainda podemos verificar a propriedade 1:

Propriedade 1: O grupo D_n não é abeliano (ou comutativo) para $n \geq 3$, ou seja, a ordem das operações é relevante, isto é, a propriedade $a \circ b = b \circ a$ não é garantida para todos os elementos $a, b \in D_n$.

Para verificar isso, consideremos dois elementos $a, b \in D_n$, sendo rotações. A composição $a \circ b$ representaria a rotação resultante de aplicar primeiro b e depois a, enquanto $b \circ a$ representaria a rotação resultante de aplicar primeiro a e depois b.

Em D_n, para $n \geq 3$, as rotações não comutam, ou seja, $a \circ b$ e $b \circ a$ geralmente representarão rotações diferentes, indicando que D_n não é um grupo abeliano.

Com base nesta análise preliminar, elaboramos uma situação didática a ser apresentada na fase de concepção e análise a priori na subseção seguinte.

Concepção e análise a priori: uma proposta para o ensino de grupos diedrais

Artigue (2014) aponta que uma análise a priori procura especificar as possibilidades selecionadas (dentre as situações que se colocam em jogo no processo experimental), os valores das variáveis didáticas (microdidáticas ou macrodidáticas) que são produzidas a partir dessa seleção e o significado que os comportamentos esperados podem ter, levando em conta esses valores. Almouloud e Silva (2012, p. 27) reiteram que, na análise a priori, pode-se realizar uma previsão de comportamentos e "[...] tentar demonstrar como a análise permite controlar seus significados e assegurar, particularmente, que se tais comportamentos esperados ocorreram, é por consequência do desenvolvimento visado pela aprendizagem".

Nesta etapa da ED, em que apresentamos uma proposta didática para o ensino de grupos diedrais com o GeoGebra, utilizando os seus recursos visuais e manipuláveis, assumimos a premissa de que a visualização e a manipulação algébrica/geométrica desta construção configura-se como um potencial norteador na mediação didática do docente ao trabalhar com o referido tema. Segundo Alves (2020, p. 340) "[...] o professor poderá valorizar o papel da visualização, mediante a exploração do software GeoGebra, tendo em vista a aquisição de uma cultura matemática e o delineamento de hábitos intelectuais aplicáveis em outras situações".

Alves e Dias (2019, p. 6) salientam que "[...] a ED é uma metodologia de pesquisa, sendo assim se torna indispensável o uso de teorias que servem para fundamentar a investigação e para a leitura/interpretação dos dados possivelmente produzidos pelos estudantes". Assim, reforça-se que o docente explore uma teoria de ensino compatível com o planejamento dos conteúdos e os objetivos a serem atingidos na aula, como forma de orientar seu trabalho.

Para o trabalho de forma articulada com a ED, traz-se a Teoria das Situações Didáticas (TSD) (Brousseau, 2002, 2008) como forma de organizar e modelar uma situação didática envolvendo o assunto, a partir de uma construção elaborada no GeoGebra, buscando prever comportamentos do estudante mediante a situação didática proposta.

Em Brousseau (2008, p. 20), o autor define que "[...] uma 'situação' é um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado". Assim, as situações didáticas remetem aos modelos que descrevem as relações das atividades entre aluno, professor e o *milieu*. De forma ampla, o *milieu* se refere ao meio adidático, sendo o conjunto de elementos que compõem esse ambiente. Este inclui não apenas os aspectos físicos do ambiente de ensino, como a sala de aula e os materiais didáticos, mas também os elementos sociais, culturais e cognitivos que influenciam a situação de aprendizagem.

Sumariamente, a TSD prioriza o desenvolvimento do aluno de forma ativa e autônoma e é modelada por dialéticas, que segundo Brousseau (2008) podem ser descritas, em síntese, como:

Dialética de ação: é o momento da tomada de posição, onde o aluno tem o primeiro contato com a questão/problema e busca em seus conhecimentos prévios encontrar elementos necessários para desenvolver possíveis caminhos para a solução.

Dialética de formulação: etapa em que há troca de informação entre o meio e o aluno; é o momento de expor as ideias de forma clara e verbalizada, porém sem nenhuma formalização rigorosa. O aluno traça estratégias e começa a se apropriar do conhecimento.

Dialética de validação: o aluno demonstra sua estratégia para os colegas e o professor (mediador), buscando convencê-los de seus argumentos e validar sua resposta dentro do sistema previamente estabelecido.

Dialética de institucionalização: o momento em que o professor sintetiza de forma significativa tudo o que foi exposto nas etapas anteriores, formalizando o caráter matemático do que foi validado pelos alunos.

Portanto, pode-se perceber a situação didática como uma situação em que prevalece a dialética da circunstância e do contexto, sendo essencial que o professor faça o elo entre suas etapas e a transposição do conhecimento, como forma de assegurar que os objetivos sejam atingidos na aula planejada. Importa salientar que para a compreensão e desenvolvimento do estudante na situação didática proposta, torna-se necessário que este tenha conhecimentos prévios sobre a noção de grupos e sua condição de existência e de simetrias em Geometria.

Assim, para articular a ED e a TSD, viabilizando o ensino de grupos diedrais, apresentamos a seguinte situação:

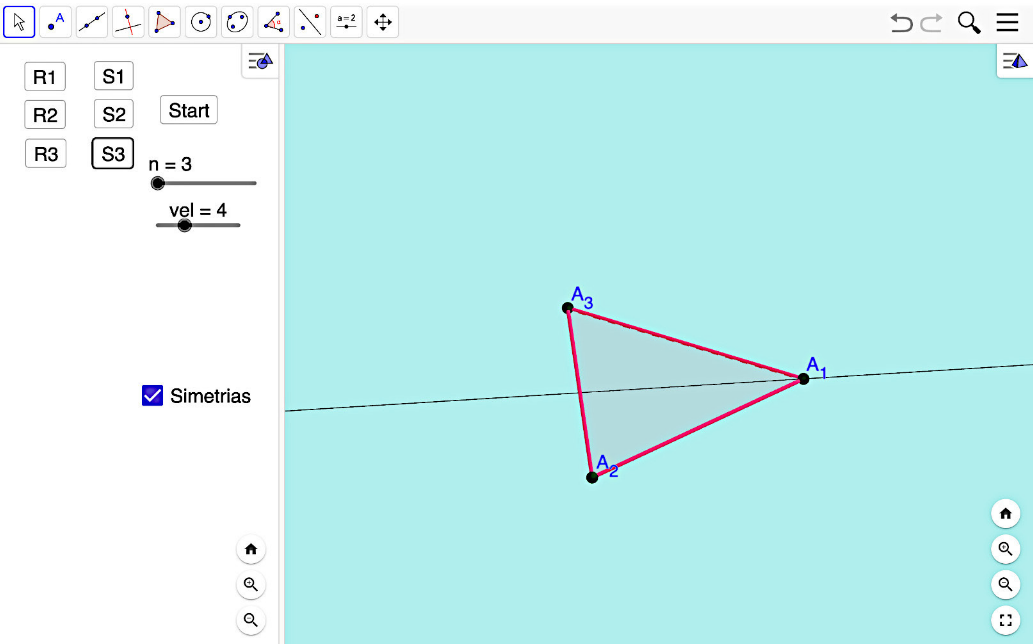
Situação didática: Dada a construção no GeoGebra, em que os botões R_n e S_n representam movimentos de rotação e reflexão, respectivamente, com relação aos polígonos regulares, investigue e descreva todas as simetrias possíveis para um polígono de n lados, provando as condições de existência para que este conjunto de simetrias seja considerado uma estrutura de grupo.

Sugere-se que a situação didática proposta seja desenvolvida em turmas de Licenciatura em Matemática nas quais os estudantes estejam estudando a disciplina de Estruturas Algébricas e/ou Álgebra Abstrata, e que o docente possa realizar uma abordagem didática de simetrias em polígonos regulares utilizando a ferramenta GeoGebra. Espera-se que os estudantes tenham conhecimento prévio sobre polígonos regulares e suas características básicas, bem como sobre operações de rotação e reflexão.

Dito isto, a situação didática tem como objetivos: (a) investigar e descrever todas as simetrias possíveis para um polígono de n lados; (b) provar as condições de existência para que esse conjunto de simetrias seja considerado uma estrutura de grupo.

Na **figura 2** temos a construção inicial proposta.

Figura 2 – Construção no GeoGebra para $n = 3$



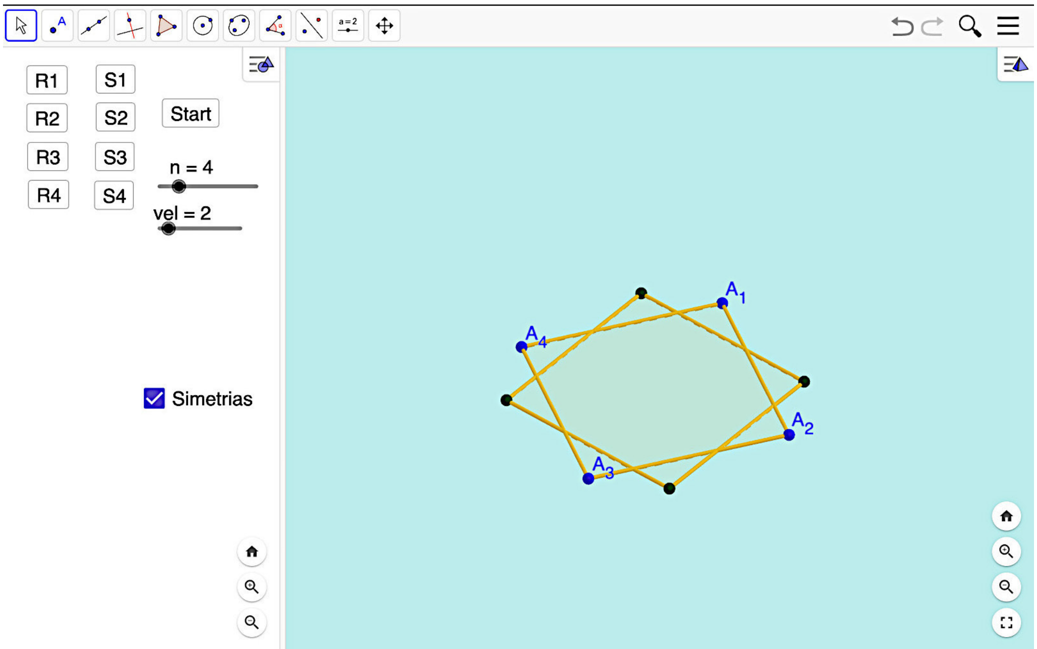
Fonte: Elaboração dos autores.

Recomenda-se que o professor recapitule o conceito de simetrias em polígonos regulares, explicando que uma simetria é uma transformação que deixa uma figura inalterada após aplicada. Além disso, é aconselhado mostrar aos estudantes o recurso construído no GeoGebra, destacando os botões R_n (rotação) e S_n (reflexão), que representam movimentos de rotação e reflexão em polígonos regulares.

Na *dialética de ação* espera-se que os estudantes, de posse da construção, utilizem o GeoGebra para interagir com o polígono, experimentando diferentes rotações e reflexões a partir dos botões R_1, R_2 e R_3 e S_1,S_2 e S_3, observando como as simetrias se comportam conforme o número de lados do polígono varia. Almeja-se, da mesma forma, que verifiquem que os controles deslizantes n e vel alteram a quantidade de lados do polígono e a velocidade nos movimentos de rotação e reflexão, respectivamente. Os estudantes podem ser incentivados a registrar suas observações e descobertas de forma manuscrita.

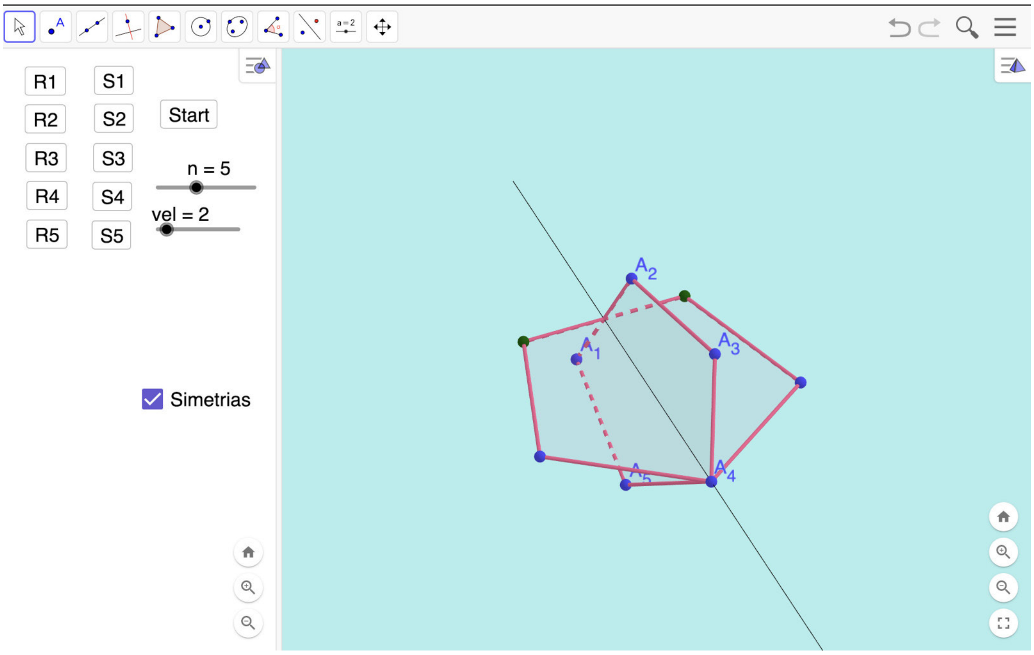
As **figuras 3**, **4** e **5** mostram possibilidades de uma exploração interativa dentro da *dialética de ação*, em que os estudantes podem identificar todas as rotações possíveis r_k, onde k é um divisor positivo de n e todas as reflexões possíveis, s_j, onde j é um divisor positivo de $2n$.

Figura 3 – Construção no GeoGebra para $n = 4$ e uso dos botões do tipo R_n



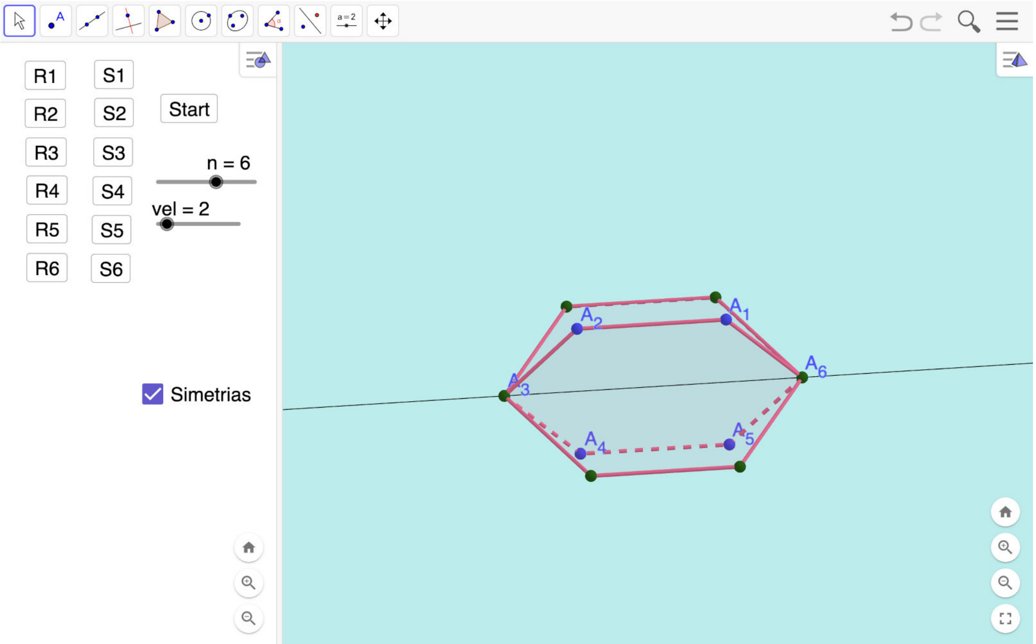
Fonte: Elaboração dos autores.

Figura 4 – Construção no GeoGebra para $n = 5$ e uso dos botões do tipo S_n



Fonte: Elaboração dos autores.

Figura 5 – Construção no GeoGebra para $n = 6$ e uso dos botões do tipo S_n



Fonte: Elaboração dos autores.

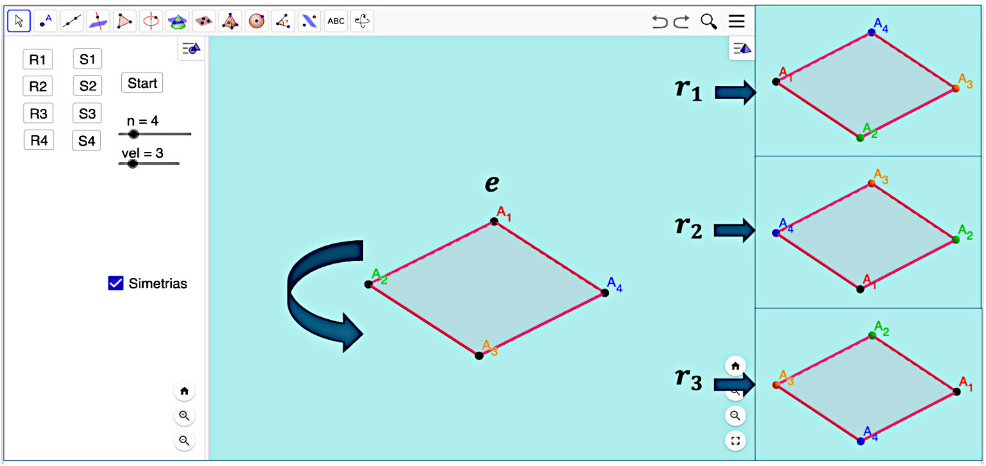
Na *dialética de formulação*, almeja-se que os estudantes formulem hipóteses sobre as características das simetrias observadas, verificando os padrões e testando suas conjecturas para diferentes polígonos regulares, observando se as simetrias se mantêm. Propõe-se que sejam estimuladas discussões em pequenos grupos, de dois ou três estudantes, no intuito de que ocorra um compartilhamento de informações, como prevê a TSD (Brousseau, 2002). Após explorar a construção, os grupos podem discutir suas descobertas e compartilhar as simetrias que encontraram, e as características comuns entre elas, enquanto o professor orienta a discussão, fazendo perguntas que levem os alunos a pensar sobre as propriedades das simetrias e como elas se relacionam com os conceitos matemáticos estudados.

Os estudantes são desafiados a provar que o conjunto de simetrias de um polígono de n lados forma uma estrutura de grupo. Sugere-se que revisem os conceitos de grupo e suas propriedades e trabalhem juntos para demonstrar as propriedades de fechamento, associatividade, identidade e inverso para as simetrias encontradas.

Desta forma, os estudantes podem provar as propriedades de grupos a partir de algum valor pré-fixado no controle deslizante n. Exemplificamos um dos valores que pode ser analisado pelos estudantes, em que adotamos $n = 4$, que seria o grupo diedral $D4$, referente a todas as simetrias de um quadrado. Este grupo é gerado por duas operações: uma rotação de 90° graus no sentido horário, denotada por r, e uma reflexão em relação a um eixo vertical, denotada por s. O conjunto de elementos do grupo D_4 é $\{e, r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3, s_4\}$, onde e é a identidade, ou equivalente a um movimento de 0°.

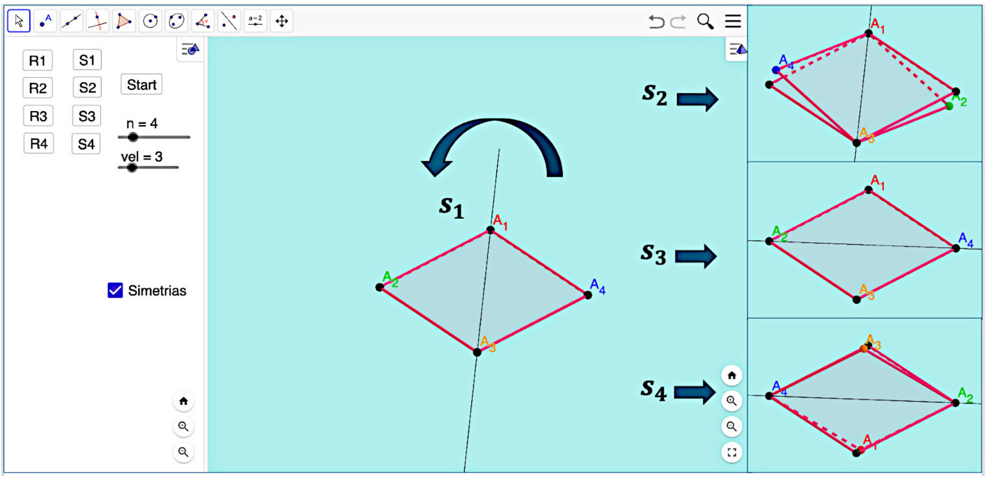
A visualização de cada um destes elementos ao explorar a construção no GeoGebra é apresentada nas **figuras 6** e **7**.

Figura 6 – Rotações do grupo D_4 no GeoGebra



Fonte: Elaboração dos autores.

Figura 7 – Reflexões do grupo D_4 no GeoGebra



Fonte: Elaboração dos autores.

Note nas **figuras 6** e **7** que temos os quatro movimentos referentes às rotações em D_4 e os quatro movimentos para as reflexões, respectivamente. A partir da visualização no GeoGebra, os estudantes podem também provar as propriedades para que D_4 seja comprovadamente uma estrutura algébrica de grupo:

(a) *Associatividade*:

$$r_1 \circ (s_1 \circ s_2) = r_1 \circ (r_2) = r_3$$
$$(r_1 \circ s_1) \circ s_2 = s_3 \circ (s_2) = r_3$$

Logo, $r_1 \circ (s_1 \circ s_2) = (r_1 \circ s_1) \circ s_2$, sendo válida a associatividade.

(b) *Existência de elemento neutro*:

É o elemento e, que corresponde à rotação de $0°$, pois $r_1 \circ e = e \circ r_1 = e$.

(c) *Existência de inverso*:

– o inverso de r_1 é r_3, pois $r_1 \circ r_3 = r_3 \circ r_1 = e$
– o inverso de r_2 é r_2, pois $r_2 \circ r_2 = e$
– o inverso de s_n é s_n, pois todo $s_n \circ s_n = e$, para $n = 1, 2, 3$ ou 4.

Assim, segue que D_4 é fechado sob a operação de composição, pois a composição de quaisquer dois elementos resulta em outro elemento no grupo. Portanto, o conjunto $\{e, r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ com a operação de composição forma um grupo, conhecido como grupo diedral D_4, que descreve as simetrias de um quadrado. A partir da manipulação e da visualização no GeoGebra, também é possível construir a tábua do grupo D_4:

Quadro 1 – Representação da tábua do grupo D_4

$\circ$	**e**	$\mathbf{r_1}$	$\mathbf{r_2}$	$\mathbf{r_3}$	$\mathbf{s_1}$	$\mathbf{s_2}$	$\mathbf{s_3}$	$\mathbf{s_4}$
e	e	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3	s_4
$\mathbf{r_1}$	r_1	r_2	r_3	e	s_3	s_4	s_2	s_1
$\mathbf{r_2}$	r_2	r_3	e	r_1	s_2	s_1	s_4	s_3
$\mathbf{r_3}$	r_3	e	r_1	r_2	s_4	s_3	s_1	s_2
$\mathbf{s_1}$	s_1	s_4	s_2	s_3	e	r_2	r_3	r_1
$\mathbf{s_2}$	s_2	s_3	s_1	s_4	r_2	e	r_1	r_3
$\mathbf{s_3}$	s_3	s_1	s_4	s_2	r_1	r_3	e	r_2
$\mathbf{s_4}$	s_4	s_2	s_3	s_1	r_3	r_1	r_2	e

Fonte: Elaboração dos autores.

É possível, ainda, que durante a *dialética de formulação* os estudantes consigam estabelecer hipóteses para provar as propriedades algébricas de grupo para o caso dos grupos diedrais D_n, seguindo as etapas usuais de demonstração. Ressaltamos que adotamos arbitrariamente a demonstração das propriedades do grupo D_4, contudo, esta demonstração poderia ter sido realizada a partir de qualquer valor de n disposto no intervalo de valores do controle deslizante. Dada a brevidade deste manuscrito e a natureza teórica deste trabalho, atentamo-nos a demonstrar apenas um modelo de polígono na situação didática.

Na *dialética de validação*, estas etapas podem ser demonstradas e justificadas com base na construção no GeoGebra, em que algumas características e propriedades podem ser visualizadas. É esperado que nesta etapa a discussão gire em torno das demonstrações e provas das propriedades básicas de grupos, generalizando para D_n. Cada grupo pode apresentar suas descobertas e provas para a turma, em que se espera que, após esta atividade, os estudantes apresentem uma compreensão mais clara das simetrias em polígonos regulares e como elas formam uma estrutura de grupo.

Para validar a situação, os estudantes podem utilizar as propriedades que definem a condição de existência de um grupo. Demonstramos um modelo de validação, de modo não exaustivo, com uma abordagem geral relativa às *rotações* e *reflexões* em D_n:

1. *Fechamento*: Se r_i e r_j são rotações em D_n, a composição $r_i \circ r_j$ também é uma rotação, pois a composição de duas rotações é outra rotação. A propriedade do fechamento para as rotações é imediata, pois a composição de duas rotações consecutivas ainda é uma rotação. De modo análogo, isto vale para a composição entre duas reflexões ou entre uma rotação e uma reflexão;
2. *Associatividade*: A associatividade para rotações e reflexões em D_n é uma propriedade geral da composição de funções, em que é possível verificar que $(r_i \circ r_j) \circ r_k = r_i \circ (r_j \circ r_k)$ para rotações consecutivas;

3. *Existência de elemento neutro*: A prova é trivial. A rotação r_0 (sem rotação) serve como a identidade para as rotações em D_n;
4. *Existência de inverso*: O inverso de uma rotação r_i é a rotação oposta r_{n-i} ou (r_{-i}) e o inverso de uma reflexão $s_k^{-1} = s_k$.

As demonstrações sugeridas têm por base as propriedades específicas de D_n, em que o conjunto de elementos consiste em rotações r_i (para $0 \leq i < n$) e, de modo análogo, nas reflexões s_i (para $0 \leq i < n$) (Garcia; Lequain, 2015).

A *dialética de institucionalização* pode ser conduzida de modo a promover a reflexão dos estudantes acerca do conhecimento estudado, reforçando a compreensão de conceitos. Dito isto, são possibilidades ao docente fazer um resumo das descobertas, retomada de conhecimentos prévios, contextualização do tema, reforço de conceitos-chave abordados, bem como a realização de uma avaliação informal, observando as reações dos estudantes e fazendo perguntas para avaliar seu nível de compreensão. Este é um momento para esclarecer dúvidas remanescentes e fornecer feedback adicional, se necessário.

O professor pode realizar uma apresentação teórica do grupo $D_n = \langle R, S \mid R^n = S^2 = (RS)^2 = e \rangle$, em que R representa uma rotação e S representa uma reflexão, a partir das obras de Garcia e Lequain (2015) e Dillon (2018), verificando com a construção no GeoGebra as propriedades para que D_n seja considerado um grupo em uma perspectiva visual. É possível que, a partir do controle deslizante, seja enfatizado que D_n tem ordem $2n$, consistindo em n rotações e n reflexões, como brevemente explicitado em nossa análise preliminar.

Outras notações e propriedades dos seus elementos podem ser exploradas, como a construção da tabela de Cayley, ou tábua do grupo, a descrição de simetrias em P_n com justificativas matemáticas, a aplicação dos conceitos aprendidos em polígonos mais complexos e a discussão em sala de aula sobre diferentes abordagens e possíveis aplicações do tema.

Considerações finais

Diante da proposta de ensino apresentada para o trabalho com grupos diedrais, é possível destacar a significativa contribuição proporcionada pela abordagem teórica adotada, que se centra na exploração das propriedades de rotações e reflexões nestes grupos. A contextualização teórica inicial, que parte da construção de uma evolução histórica e epistemológica do tema, nos proporcionou uma base para elaboração de uma sessão de ensino, visando a construção do conhecimento.

Assim, o enfoque sobre o tema se deu a partir de uma situação didática organizada com base na Teoria das Situações Didáticas (TSD), como uma proposta para o ensino do tema em uma perspectiva que preconiza a visualização em Álgebra Abstrata. Para isto, nos apoiamos em uma Engenharia Didática, na estruturação de suas duas primeiras fases, visando uma implementação em sala de aula e posterior coleta de dados.

Ao direcionar o olhar para as implicações para o ensino, refletimos sobre como essa proposta didática pode influenciar positivamente a abordagem do tema, especificamente no âmbito da formação inicial. Ao propiciar uma alternativa à compreensão da estrutura algébrica de grupo em uma perspectiva visual, é possível contribuir para o entendimento de propriedades de outras estruturas. Assim, indicamos esta construção como material didático e sugestões concretas para a integração desses conceitos ao currículo, visando aprimorar a compreensão e a aplicação prática por parte dos estudantes.

Como apontado na análise preliminar deste trabalho, os estudantes da licenciatura apresentam dificuldades na compreensão da Álgebra Abstrata. Nosso intuito é que a abordagem do tema com o GeoGebra possa mitigar essas dificuldades, a partir da visualização interativa de simetrias em polígonos, proporcionando uma representação concreta e otimizando a compreensão dos conceitos, bem como estreitando a relação entre a álgebra e a geometria atinentes ao tema. Também é possível realizar uma exploração prática das propriedades dos grupos diedrais, por meio da construção de polígonos e visualização das transformações associadas. Além disso, consideramos que utilizar o GeoGebra oferece uma experiência capaz de promover a aprendizagem ativa e ajudar os estudantes a interiorizar conceitos abstratos.

Por fim, espera-se que esta proposta didática contribua para o ensino de Teoria dos Grupos e a compreensão das propriedades de rotações e reflexões em grupos diedrais, proporcionando subsídios para práticas pedagógicas mais eficazes, que alinhadas à Engenharia Didática e à TSD, podem enriquecer o percurso de formação inicial do professor de matemática.

Agradecimentos

O segundo autor agradece o incentivo e a contribuição financeira do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) para o desenvolvimento desta pesquisa no Brasil.

O terceiro autor agradece pelo financiamento fornecido pelos Fundos Nacionais, por meio da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), I.P., no âmbito do projeto UIDB/00194/2020 (CIDTFF).

Referências

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. *Revemat*: revista. eletrônica de educação matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p22.

ALVES, F. R. V. Didática das ciências e matemática (DCEM): surgimento e implicações para a formação do professor. *IENCI*: investigações em ensino de ciências, Porto Alegre, v. 22, n. 3, p. 291-320, 2017. DOI: https://doi.org/10.22600/1518-8795.ienci2017v22n3p291.

ALVES, F. R. V. Situações didáticas olímpicas (SDOs): ensino de olimpíadas de matemática com arrimo no software GeoGebra como recurso na visualização. *Revista Alexandria*, Florianópolis, v. 13, n. 1, p. 319-349, 2020. DOI: https://doi.org/10.5007/1982-5153.2020v13n1p319.

ALVES, F. R. V. Visualizing the olympic didactic situation (ODS): teaching mathematics with support of the GeoGebra software. *Acta Didactica Napocensia*, Romania, v. 12, n. 2, p. 97-116, 2019. DOI: https://doi.org/10.24193/adn.12.2.8.

ALVES, F. R. V.; ARAÚJO, A. G. D. Ensino de álgebra abstrata com auxílio do software maple: grupos simétricos. *Conexões*: ciência e tecnologia, Fortaleza, v. 7, n. 3, p. 25-35, 2013.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Engenharia didática de formação (EDF): repercussões para a formação do professor de matemática no Brasil. *Educação Matemática em Revista*, v. 2, n. 18, 2017. Disponível em: https://tinyurl.com/3vn6ypmd. Acesso em: 18 jul. 2024.

ALVES, F. R. V.; DIAS, M. A. Engenharia didática para a teoria do resíduo: análises preliminares, análise a priori e descrição de situações-problema. *Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas*, Londrina, v. 20, n. 1, p. 2-14, 2019.

ARTIGUE, M. Perspectives on design research: the case of didactical engineering. *In*: BIKNERAHSBAHS, A; KNIPPING, C; PRESMEG, N. *Approaches to qualitative research in mathematics education*. New York: Springer, 2014. p. 467-496.

BAIRRAL, M. A.; BARREIRA, J. C. F. Algumas particularidades de ambientes de geometria dinâmica na educação geométrica. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, São Paulo, v. 6, n. 2, p. 46-64, 2017.

BRANDEMBERG, J. C. *Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo*. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2009.

BROUSSEAU, G. *Theory of didactical situations in mathematics*: didactique des mathematiques 1970-1990. Dordrecht: Kluwer, 2002.

BROUSSEAU, G. *Introdução ao estudo das situações didáticas*: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CARLSON, D. The teaching and learning of tertiary algebra. *In*: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (ed.). *The future of the teaching and learning of algebra*: the 12th ICMI study. Dordretch: Springer, 2004. p. 293-312. DOI: https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_11.

CARTER, N. C. *Visual group theory*. Waltham: Bentley University, 2009.

CURTIS, C. W. *Pioneers of representation theory*: Frobenius, Burnside, Schur and Brauer. Washington: American Mathematical Society, 1999.

DIAS, G. S.; NOGUTI, F. C. H. Considerações sobre a álgebra acadêmica e a álgebra escolar: um estudo em cursos de matemática licenciatura. *Educação Matemática Debate*, Montes Claros, v. 7, n. 13, p. 1-22, 2023. DOI: https://doi.org/10.46551/emd.v7n13a06.

DILLON, M. I. *Geometry through history*: euclidean, hyperbolic, and projective geometries. Cham: Springer, 2018.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. São Paulo: Ed. Unicamp, 2002.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. *Elementos de álgebra*: projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

KLEINER, I. *A history of abstract algebra*. Toronto: Birkhäuser, 2007.

MATHIAS, C. V.; SILVA, H. A.; LEIVAS, J. C. P. Provas sem palavras, visualização, animação e GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, São Paulo, v. 8, n. 2, p. 62-77, 2019. DOI: https://doi.org/10.23925/2237-9657.2019.v8i2p062-077.

MCCLAIN, W. M. *Symmetry theory in molecular physics with mathematica*: a new kind of tutorial book. New York: Springer, 2009.

MILLER, G. H. The evolution of group theory. *The Mathematics Teacher*, Reston, v. 57, n. 1, p. 26-30, 1964. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/27956961. Acesso em: 30 jul. 2024.

MONTEIRO, A. T. M.; MOURA, L. F. C. M.; FONSECA, R. V. Grupos diedrais: uma proposta concreta para uma apresentação inicial da álgebra abstrata para licenciandos em matemática. *Revista Matemática e Ciência*: conhecimento, construção e criatividade, Belo Horizonte, v. 2, n. 2, p. 56-86, 2019. Short DOI: https://doi.org/m8q5.

SINCLAIR, N.; MOSS, J.; HAWES, Z.; STEPHENSON, C. Learning through and from drawing in early years geometry. *In*: MIX, K. S. S.; BATTISTA, M. (ed.). *Visualizing mathematics*: the role of spatial reasoning in mathematical thought. Cham: Springer, 2018. p. 229-254.

SOUSA, R. T.; SANTIAGO, P. V. S.; ALVES, F. R. V. Modelagem matemática em problemas da OBMEP: a visualização geométrica com aporte do software GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, Buenos Aires, v. 32, p. 34-43, 2022. DOI: https://doi.org/10.24215/18509959.32.e4.

WASSERMAN, N. H. Abstract algebra for algebra teaching: influencing school mathematics instruction. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, Canada, v. 16, n. 1, p. 28-47, 2016. DOI: https://doi.org/10.1080/14926156.2015.1093200.

WUSSING, H. *The genesis of abstract group concept*. Mineola, US: Dover Publications, 2007.