

# DIAGNÓSTICO E ANÁLISE DE ERROS EM MATEMÁTICA: SUBSÍDIOS PARA O PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM\*

Elizabeth Belfort da Silva Moren

do Instituto de Matemática/UFRJ

Maria Manuela Martins Soares David

da Faculdade de Educação/UFMG

Maria da Penha Lopes Machado

do Depto. de Matemática/UFMG

---

## RESUMO

No cotidiano da sala de aula, o erro é geralmente encarado de forma demasiado limitada, apenas como avaliador do desempenho acadêmico de alunos. Este artigo relata uma pesquisa em que o diagnóstico e análise de erros em Matemática atuam na identificação de níveis de dificuldade da aprendizagem, na avaliação e orientação do processo ensino-aprendizagem. Em torno da operação de subtração, aplicou-se um teste para identificar níveis de dificuldade a alunos de 3ª a 6ª séries de 11 escolas públicas em Belo Horizonte e no Rio de Janeiro. A análise dos erros revela que uma boa compreensão da estrutura de nosso sistema de numeração implica bom desempenho nas contas, mas a recíproca não é verdadeira, permitindo avançar sugestões para o ensino em sala de aula.

MATEMÁTICA - ANÁLISE DE ERROS - ENSINO-APRENDIZAGEM - ENSINO DE 1º GRAU

## ABSTRACT

DIAGNOSTICS AND ANALYSIS OF ERRORS IN MATHEMATICS AS A CONTRIBUTION FOR THE LEARNING PROCESS. In classroom day-to-day errors are usually viewed as mere indicators of student achievement. This article describes a research where diagnostics and analysis of errors in Mathematics were used to identify levels of difficulty, and to evaluate and guide the teaching/learning process. Based upon the operation of subtraction, tests were applied to students from 3rd. to 6th. grades of 11 public schools in Belo Horizonte and Rio de Janeiro, so as to assess levels of difficulty. Results show that, whereas a good understanding of the structure of our numeration system implies a good achievement in subtraction, the reciprocal is not true, which allows suggestions to improve teaching in the classroom.

---

\* A pesquisa que resultou neste texto teve o apoio financeiro do CNPq, PRPq/UFMG e SRDExt/UFRJ; contou com a contribuição dos alunos, professores e diretores que gentilmente nos receberam nas escolas; de Ângela Maciel e Mônica Mandarino, que participaram em alguns momentos; de Luiz Otávio Langlois, que forneceu assessoria estatística; e com a significativa contribuição dos alunos de Iniciação Científica.

A idéia inicial desta pesquisa surgiu da leitura do artigo *Diagnosing bugs in a simple procedural skill*, de R. Burton (1982), em que o autor usa os recursos do computador e desenvolve um programa que lhe permite, perante uma conta de subtração errada, identificar os erros e/ou combinações de erros cometidos.

O interesse pelo artigo, aliado ao interesse de professores da UFRJ e da UFMG em desenvolver um trabalho conjunto em ensino de Matemática, deu origem a um projeto visando aprofundar o estudo sobre o diagnóstico e análise de erros.

A leitura do artigo revelou um tratamento muito técnico da análise de erros. Nosso trabalho busca inserir a análise de erros num contexto mais geral de ensino-aprendizagem em Matemática. Isto é, uma vez detectado o erro, uma análise do mesmo deveria levar a uma revisão dos procedimentos didáticos que o originaram.

A etapa seguinte consistiu na escolha de um conteúdo de Matemática que servisse de base para a pesquisa. A opção pela subtração resultou do próprio artigo e do fato de ser a subtração o primeiro assunto em que os alunos enfrentam maiores dificuldades.

Dentro da preocupação de encarar a análise de erros como orientadora do processo de ensino-aprendizagem, sentimos necessidade de, além de avaliar o desempenho dos alunos no algoritmo da subtração, analisar também a compreensão desse algoritmo e a compreensão da operação. Acreditando que esses aspectos estão intimamente relacionados à estrutura de nosso sistema de numeração, tornou-se necessário discutir também essa relação.

Essa avaliação foi feita com base na aplicação de um teste em escolas do Rio de Janeiro e de Belo Horizonte, não com o intuito de confrontar o desempenho nas duas cidades, mas com o objetivo de ampliar a amostra, já que havia pesquisadores envolvidos nas duas cidades.

## A PESQUISA

O objetivo principal da pesquisa foi buscar uma fundamentação para a relação existente entre a compreensão da estrutura de nosso sistema de numeração e a compreensão da técnica do algoritmo da subtração. Essa fundamentação foi feita através do diagnóstico e análise das dificuldades encontradas pelos alunos no algoritmo da subtração e com o sistema de numeração.

O diagnóstico das dificuldades foi feito através da aplicação de um teste a alunos de 3ª, 4ª, 5ª e 6ª séries do 1º grau. Limitamos o estudo a essas séries, uma vez que na 3ª série os alunos já deverão ter esgotado todas as etapas da aprendizagem da subtração e a 6ª série é o ponto terminal da ênfase aos processos operatórios.

Além da aplicação do teste, realizamos entrevistas com alunos dessas mesmas séries procurando, por um lado, verificar se era correta a interpretação

que estávamos dando a determinados resultados e, por outro, esclarecer casos de dúvidas que ocorreram na correção do teste.

Na montagem de um teste que atendesse aos objetivos deveriam constar questões sobre:

- a compreensão do sistema de numeração, abordando a idéia de agrupamento e valor posicional;
- a compreensão do mecanismo do algoritmo;
- a compreensão da operação, sob a forma de problemas;
- a técnica do algoritmo (contas).

A seleção das questões para o teste foi feita a partir da bibliografia consultada e de questões criadas pelos pesquisadores.

Tivemos a preocupação de incluir no teste tanto questões com a forma normalmente encontrada em livros didáticos, como questões com uma formulação menos usual no contexto escolar. Além disso, as questões envolveriam ora uma situação-problema próxima da experiência do aluno, ora uma formulação mais "acadêmica". Considerando que pretendíamos observar a evolução da compreensão e o desempenho na subtração, da 3ª à 6ª série, procuramos questões compatíveis com este nível de escolaridade.

Até chegar à forma definitiva do teste, passamos pela montagem e aplicação de um teste piloto que permitiu a revisão das questões quanto à adequação da redação e seus aspectos gráficos, à adequação das questões em relação aos quatro aspectos contemplados no teste, à previsão do tempo de aplicação. O teste piloto também serviu como prévia para a correção das questões, codificação das mesmas e testagem dos procedimentos estatísticos utilizados na análise dos resultados.

## A amostra

As escolas que constituíram a amostra fazem parte da rede pública de ensino, tanto no Rio de Janeiro como em Belo Horizonte. Não houve a pretensão de selecionar uma amostra que fosse representativa (estatisticamente) do conjunto de escolas públicas do Rio ou de Belo Horizonte. O que norteou a escolha foi a preocupação de garantir na amostra alunos de níveis sócio-econômicos bem diferenciados. Apesar de essa diferenciação não constituir uma variável na análise, esperávamos com ela obter uma gama mais variada de erros.

Solicitamos à 1ª Delegacia Regional de Ensino-MG e à Secretaria Municipal de Ensino - RJ que indicassem, cada uma, quatro escolas que pudessem ser caracterizadas como atendendo a clientela de: elite (escola de classe média, em bairro classe média); mediana (escola de classe média baixa); de classe popular (escola de classe média baixa, em bairro de periferia); e de favela (escola que atende uma clientela de favela).

Além disso, incluímos na amostra uma escola de tempo integral (de nível médio) do Rio e as duas es-

colas de 1º grau da UFRJ e da UFMG, a fim de observar a influência de propostas pedagógicas diferenciadas sobre os resultados do estudo.

No total, o teste foi aplicado em onze escolas, seis no Rio e cinco em Belo Horizonte. Em cada escola selecionamos quatro turmas de 3ª a 6ª série, todas consideradas de nível mediano quanto ao aproveitamento escolar dos alunos. O teste foi aplicado a um total de 1270 alunos, sendo 574 de Belo Horizonte e 696 do Rio, assim distribuídos: 3ª série — 332; 4ª série — 339; 5ª série — 297; e 6ª série — 302.

### Tratamento Estatístico

Para a análise dos resultados foram definidos códigos específicos para as diferentes respostas a cada tipo de questão. Com essa codificação realizamos os seguintes levantamentos estatísticos:

- freqüência de acertos por questão
  - no total da amostra;
  - por estado;
  - por escola;
  - por série.
- freqüência dos diferentes erros em cada questão;
- correlação entre questões do mesmo tipo, isto é, questões medindo o mesmo aspecto;
- correlação entre diferentes tipos de questões: Compreensão do Sistema de Numeração X Compreensão do Mecanismo do Algoritmo X Técnica do Algoritmo.

Apesar de o principal interesse do trabalho ser a análise de erros, fizemos o levantamento da freqüência de acertos para identificar questões muito fáceis e ter uma visão de como melhora o nível de compreensão dos aspectos envolvidos, da 3ª à 6ª série.

O levantamento das freqüências de acerto por escola e por estado teve como objetivo identificar níveis de desempenho na amostragem das escolas das duas cidades.

O levantamento das freqüências dos diferentes erros em cada questão permitiu avaliar a evolução desses erros ao longo das séries, assim como relacionar o tipo do erro com o tipo de questão.

Com as correlações entre questões do mesmo tipo pretendemos validar os agrupamentos de questões, de acordo com os diferentes aspectos. Com as correlações entre diferentes tipos de questões pretendemos verificar a relação existente entre Compreensão do Sistema de Numeração, Compreensão do Mecanismo do Algoritmo e Desempenho nas Contas.

### ANÁLISE DOS RESULTADOS

A análise estatística dos resultados incluiu, num primeiro momento, a análise das variáveis embutidas na amostra (estado, escola, série) e, num segundo momento, a análise dos quatro aspectos contemplados nas questões do teste (Compreensão da Operação, Compreensão do Sistema de Numeração, Compreen-

são do Mecanismo do Algoritmo e Técnica do Algoritmo).

Não era nossa intenção confrontar os resultados entre os estados, mas verificar se o desempenho dos alunos permitia somar as duas amostras.

Na análise por escola observamos melhor desempenho para as escolas de 1º grau ligadas às duas universidades (UFMG e UFRJ) e para as duas escolas consideradas "de elite". Entretanto, não ficou evidenciado se esse resultado é uma conseqüência de propostas pedagógicas diferenciadas. As outras sete escolas apresentaram desempenho inferior, apresentando níveis de acertos semelhantes entre si.

Apesar de termos embutido na amostra as variáveis estado, escola e série, fizemos a análise mais detalhada por série, uma vez que o interesse fundamental era a evolução das dificuldades na subtração ao longo das séries.

Essa análise indicou, tal como esperado, a diminuição gradual da incidência de erros da 3ª para a 6ª série. Nas questões do teste mais diretamente relacionadas com o algoritmo (Contas e Compreensão do Mecanismo do Algoritmo), o desempenho dos alunos de 4ª e 5ª séries foi muito semelhante, quando o esperado era o desempenho dos alunos de 5ª série ser semelhante ao dos alunos de 6ª série, uma vez que é usual o professor de 4ª série considerar como superado o trabalho específico com a subtração. Além disso, tradicionalmente, na 4ª série considera-se superada uma etapa de ensino, iniciando-se na 5ª série uma outra etapa.

Em nossa avaliação, o alto índice de retenção dos alunos na 5ª série está determinando um distanciamento do nível de desempenho entre a 5ª e 6ª séries.

Na análise mais diretamente relacionada às questões do teste, a avaliação da Compreensão da Operação de Subtração foi feita através de problemas abrangendo as diferentes idéias associadas à subtração: "separar", "igualar" e "comparar".

Com estes problemas, pretendíamos apenas verificar se os alunos eram capazes de identificar diferentes situações envolvendo subtração. Tendo isto, em vista, optamos por enunciados claros, simples, e eliminamos cálculos complicados.

Observamos que os alunos demonstraram uma boa compreensão da idéia de subtração, uma vez que o índice de acerto nos problemas foi bastante elevado. Consideramos esse resultado bastante natural por se tratar de alunos de 3ª a 6ª série e porque os problemas envolviam enunciados simples, sem cálculos complicados.

A avaliação da Compreensão do Sistema de Numeração foi feita através de problemas e exercícios, envolvendo as idéias de agrupamento, seriação e valor posicional. Tivemos a preocupação de incluir questões consideradas por nós como canônicas, semelhantes às questões que aparecem nos livros didáticos, e outras não-canônicas, quer na forma de apresentação, quer por envolverem a idéia de situação de

seriação, não usualmente associada às questões sobre sistema de numeração.

De todo o teste, as questões sobre a compreensão do Sistema de Numeração foram as que apresentaram maior dificuldade.

Mesmo questões do tipo:

— Complete:

$$367 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ dezenas} + \underline{\hspace{2cm}} \text{ unidades}$$

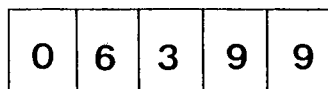
$$6025 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ centenas} + \underline{\hspace{2cm}} \text{ dezenas} + \underline{\hspace{2cm}} \text{ unidades}$$

— Quantas dezenas ao todo tem o número 238?

• usualmente encontradas nos livros didáticos, apresentaram níveis de acerto baixos em todas as séries. Em nossa interpretação, isso se deve ao fato de ambas estarem envolvendo agrupamento de mais de uma ordem.

As questões:

— Este marcador mostra quantas pessoas passaram pela roleta de um ônibus:



Depois que passar mais uma pessoa como ficará o marcador?



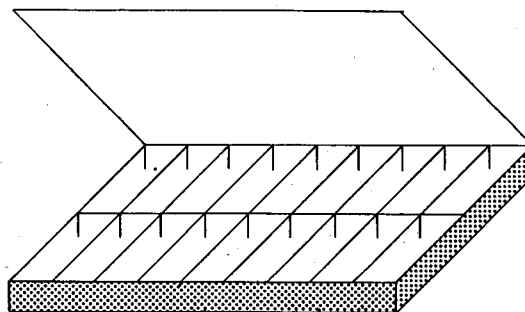
— Escreva um número qualquer:  
entre 2000 e 3000

entre 6700 e 6800

que consideramos não canônicas, envolvem a idéia de seriação.

A questão seguinte envolve a idéia de agrupamento, e foi considerada por nós não-canônica na forma de apresentação:

— Vamos arrumar 120 parafusos na caixa abaixo. Em cada quadradinho você só pode colocar 10 parafusos.



— Quantos quadradinhos você encheu? \_\_\_\_\_

Contrariamente à expectativa, as questões canônicas explicitadas acima tiveram maior índice de erros do que as questões não-canônicas citadas.

Apesar de a incidência de erros ir diminuindo ao longo das séries, como esperado, alguns aspectos da compreensão do sistema de numeração ainda não estão completamente garantidos mesmo na 6ª série. Por exemplo, questões que envolviam decomposição de um número em várias ordens, tendo que reagrupar algumas delas, ainda apresentaram dificuldades para os alunos daquela série.

As questões relativas à Compreensão do Mecanismo do Algoritmo procuravam verificar se os alunos percebiam os procedimentos envolvidos no algoritmo da subtração. Essas questões, todas do mesmo tipo, consistiam em determinar um ou dois algarismos faltosos numa conta de subtração efetuada.

Por exemplo:

4 7	4 □
2 □	□ 8
-----	-----
2 4	2 7

As contas que não envolviam empréstimo tiveram um alto nível de acerto. As dificuldades aumentaram quando apareceram os empréstimos, tendo ocorrido a maior incidência de erros na conta com empréstimo e dois algarismos faltosos.

Para avaliar o desempenho dos alunos, no que concerne à técnica do algoritmo, tomamos por base a seleção de contas feita por Burton (1982) em seu artigo, assim como sua listagem de erros. Selecionamos para o teste as contas que envolviam uma gama diversificada de erros e suas combinações.

No sentido de facilitar nossa análise, reagrupamos esses erros em três grandes blocos:

- erros relacionados com a técnica de empréstimo: o aluno percebe que tem que fazer o empréstimo e comete erro ao fazê-lo;
- erros caracterizados por evitar o empréstimo: o aluno utiliza um artifício de solução que mascara a situação de empréstimo;
- erros relacionados com brancos no subtraendo.

Tal como esperado, a maior parte dos erros nas contas está relacionada com uma dificuldade perante a situação de empréstimo, sendo mais freqüente o aluno fazer o empréstimo de uma forma inadequada, vindo a seguir os erros que comete tentando evitar o empréstimo.

Por outro lado, confirmamos que o empréstimo numa situação onde aparece uma coluna de algarismos repetidos (n-n) aumenta a incidência de erros, e não confirmamos a hipótese de que a situação "brancos no subtraendo" também poderia introduzir uma dificuldade adicional nas contas.

Constatamos que o aparecimento do zero introduz maior dificuldade nas contas. Uma situação de "empréstimo do zero" ou "empréstimo para o zero", aumenta a incidência dos erros que o aluno já comete normalmente em outras situações de empréstimos. Entretanto, o zero por si só não gera o aparecimento de erros específicos. O único erro que identificamos como diretamente relacionado com a presença do zero nas contas foi o que classificamos como "não faz empréstimo do zero e sim à primeira casa à esquerda que seja diferente de zero". Contudo, a freqüência deste erro é inferior ao que classificamos como "não desconta o empréstimo feito".

A análise de correlações entre questões relativas ao mesmo aspecto (Sistema de Numeração, Compreensão do Mecanismo do Algoritmo, Técnica do Algoritmo) foi feita comparando, para cada par de questões, as freqüências de alunos que acertaram ambas as questões ou erraram ambas as questões, com a freqüência dos que acertaram uma delas e erraram a outra. Uma análise qualitativa dos quadros assim organizados levou a constatar uma graduação das questões em níveis de dificuldade, dentro de cada aspecto.

Por exemplo, entre as questões de Técnica do Algoritmo, essa análise permitiu classificar as contas segundo quatro níveis de dificuldade, conforme apareçam ou não empréstimos, ou zeros.

Para discutir a correlação entre cada dois aspectos do teste, reduzimos artificialmente o desempenho dos alunos em cada aspecto a três categorias (Bom, Regular, Mau) e optamos por uma análise qualitativa do quadro de distribuição das freqüências de alunos relativas a todas as possíveis combinações dessas três categorias, dentro de cada dois aspectos considerados.

Procedemos para isso à padronização dos resultados desses alunos, elaborando um sistema de notas (de 0 a 10), para cada um daqueles aspectos. Excluímos dessa análise o estudo das questões referentes à Compreensão da Operação (problemas), pois nesse aspecto não havia mais o que acrescentar, uma vez que as questões apresentaram-se muito simples para as séries em que o teste foi aplicado.

Relacionamos na Tabela 1 as médias por série e as médias gerais (total de alunos).

	SISTEMA DE NUMERAÇÃO	COMPREENSÃO DO ALGORITMO	CONTAS
3ª série	4,5	4,9	6,4
4ª série	5,5	6,3	7,3
5ª série	6,2	6,7	7,6
6ª série	7,0	7,5	8,3
Média geral	5,8	6,3	7,4

Com essas médias, observamos uma evolução do desempenho dos alunos por série, assim com uma dificuldade maior com as questões de Sistema de Numeração, inclusive para os alunos de 6ª série.

Para fazer o agrupamento das notas nos diferentes aspectos em três grandes faixas utilizamos dois critérios:

- Critério 1 - Fixando o percentual de alunos por faixa: limitando as faixas, procuramos minimizar a interferência dos diferentes graus de dificuldade dos diversos aspectos do teste;

- Critério 1A - coloca aproximadamente 30%, 40% e 30% dos alunos nas faixas B (bom), R (regular) e M (mau) respectivamente;

- Critério 1B - coloca aproximadamente 25%, 45% e 30% dos alunos nas faixas B, R e M respectivamente.

- Critério 2 — Fixando notas limites para cada faixa: dessa forma, foi valorizado o desempenho acadêmico dos alunos, na forma tradicional.

O critério 1 considera o desempenho comparativo do aluno, verificando sua posição quando comparado aos demais elementos da amostra, minimizando, portanto, a influência do grau de dificuldade nas questões dos diferentes aspectos do teste. Essa influência aparece nos resultados obtidos quando utilizamos o critério 2, razão pela qual não incluiremos esses resultados na análise que faremos a seguir.

A alteração da amplitude das faixas, que determinou a caracterização dos critérios 1A e 1B, tornou-se conveniente porque observamos um número considerável de alunos nas posições limites entre as faixas do critério 1A. A restrição da faixa B (bom) e con-

seqüente ampliação da faixa R (regular) definiu com mais clareza o grupo dos alunos com desempenho bom, facilitando a leitura de alguns resultados.

No que se segue, utilizaremos os critérios 1A e 1B, um completando as informações fornecidas pelo outro.

Os dados foram organizados em tabelas cruzando aspectos diferentes dois a dois, de acordo com algum dos dois critérios.

Para cada tabela indicaremos as notas limites que nos permitiram separar as faixas B, R e M de acordo com os percentuais estabelecidos.

Na Tabela 2 (critério 1A), observamos que, dos 407 alunos que estão entre os 30% melhores em Sistema de Numeração (faixa "Bom"), 234 (57,4%) obtiveram notas acima de 9,0 em Técnica do Algoritmo (contas). Além disso, 146 obtiveram notas entre 6,5 e 9,0. Assim, apenas 27 dos 407 alunos obtiveram notas abaixo de 6,5 em "contas". A análise desses dados leva a concluir que quem se "saiu bem" em Sistema de Numeração, "saiu-se bem" na Técnica do Algoritmo (contas). A recíproca, entretanto, não é verdadeira.

Ainda na Tabela 2 (critério 1B) observamos que, dos 245 alunos que obtiveram notas acima de 9,5 na Técnica do Algoritmo (contas), 111 (41,2%) obtiveram notas acima de 8,0 e 114 (41,4%) obtiveram notas entre 8,0 e 4,0 em Sistema de Numeração. Isso leva a concluir que os alunos podem ter bom desempenho (notas acima de 9,3) em "contas" e ter desempenho regular em questões de compreensão do Sistema de Numeração.

Na Tabela 3 (critério 1B), observamos que, dos 336 alunos que acertaram todas as questões (nota acima de 9,0) de Compreensão do Algoritmo, 28 (8,3%) tiveram notas abaixo de 6,0 nas contas. Mesmo alterando a "largura" das faixas (critério 1A), temos que, dos 354 melhores resultados em Compreensão do Algoritmo, 37 (10,5%) obtiveram notas abaixo de 6,5 em contas. A análise desses dados leva a afirmar que quem se "saiu bem" nas questões de Compreensão do Algoritmo, se "saiu bem" nas questões de Técnica do Algoritmo (contas). A recíproca da afirmação acima já não aparece nos dados.

Dentre os 245 alunos com notas acima de 9,5 nas contas, 121 (49,4%) obtiveram nota máxima e 95 (38,7%) obtiveram notas regulares em Compreensão

Tabela 2

Relação entre os resultados dos alunos em Sistema de Numeração e em Contas, considerando o desempenho comparativo estimado segundo os critérios 1A e 1B\*

Sist. Num.	CRITÉRIO 1A**				CRITÉRIO 1B***			
	Contas				Contas			
	B	R	M	Total	B	R	M	Total
B	234	146	27	407	111	171	8	290
R	145	195	118	458	114	376	147	637
M	47	119	239	405	20	121	357	343
Total	426	460	384	1.270	245	668	357	1.270

\* Critério 1A: ordenados para cada categoria de questões, os resultados são agrupados nas faixas: B (Bom) — os 30% melhores; R (Regular) os 40% subseqüentes; e M (Mau) os 30% de alunos que obtiveram as notas mais baixas.

Critério 1B: As faixas B, R e M agrupam, respectivamente, 25%, 45% e 30% dos resultados dos alunos.

\*\* Notas-limite da faixa R: Sistema de Numeração  $4,5 \leq R \leq 7,2$ ;  
Contas:  $6,5 \leq R \leq 9,0$

\*\*\* Notas-limite da faixa R: Sistema de Numeração  $4,0 \leq R \leq 8,0$ ;  
Contas:  $6,0 \leq R \leq 9,3$

Tabela 3

Relação entre os resultados dos alunos em Contas e em Compreensão do Algoritmo, considerando o desempenho comparativo estimado segundo os critérios 1A e 1B

Compr. Algor.	CRITÉRIO 1A*				CRITÉRIO 1B**			
	Contas				Contas			
	B	R	M	Total	B	R	M	Total
B	197	120	37	354	121	187	28	336
R	178	242	168	588	95	352	159	606
M	51	98	179	328	29	129	170	328
Total	426	460	384	1.270	290	668	357	1.270

\* Notas-limite da faixa R: Contas:  $6,5 \leq R \leq 9,0$ ;  
Compreensão do Algoritmo  $4,5 \leq R \leq 8,0$ ;

\*\* Notas-limite da faixa R: Contas:  $6,0 \leq R \leq 9,3$ ;  
Compreensão do Algoritmo  $4,5 \leq R \leq 9,0$

Tabela 4

Relação entre os resultados dos alunos em Sistema de Numeração e em Compreensão do Algoritmo, considerando o desempenho comparativo estimado segundo os critérios 1A e 1B

Compr. Algor.	CRITÉRIO 1A*				CRITÉRIO 1B**			
	Sist. de Numeração				Sist. de Numeração			
	B	R	M	Total	B	R	M	Total
B	222	108	24	354	163	156	17	336
R	165	244	179	588	115	342	149	606
M	20	116	202	328	12	139	177	328
Total	407	458	405	1.270	290	637	343	1.270

\* Notas-limite da faixa R: Sistema de Numeração  $4,5 \leq R \leq 7,2$   
Compreensão do Algoritmo  $4,8 \leq R \leq 8,0$ ;

\*\* Notas-limite da faixa R: Sistema de Numeração  $4,0 \leq R \leq 8,0$   
Compreensão do Algoritmo  $4,5 \leq R \leq 9,0$

do Algoritmo. Isso permite concluir que os alunos podem ter bom desempenho (notas acima de 9,0) em contas, com desempenho "regular" em questões de Compreensão do Mecanismo do Algoritmo.

Na discussão da inter-relação entre os aspectos Compreensão do Sistema de Numeração e Compreensão do Algoritmo, tomaremos por base os resultados agrupados segundo o critério 1A, onde essa inter-relação fica mais evidenciada do que segundo o critério 1B (Tabela 4).

O agrupamento segundo o critério dos 30% melhores apresenta um resultado interessante: dos 354 alunos que tiveram nota acima de 8 em Compreensão do Algoritmo, 222 (62,7%) obtiveram nota acima de 7,2 em Sistema de Numeração. Reciprocamente, dos 407 alunos com notas acima de 7,2 em Sistema de Numeração, 222 (54,5% do total) tiveram nota acima de 8 em Compreensão do Algoritmo.

Observando a terceira linha, ainda na Tabela 4 — critério 1A, encontramos 202 (61,6%) dos 328 alunos que obtiveram notas abaixo de 4,5 em Compreensão do Algoritmo, com notas abaixo de 4,5 em Sistema de Numeração. Por outro lado, 202 alunos representam 49,9% dos 405 alunos que obtiveram notas abaixo de 4,5 em Sistema de Numeração.

A Tabela 4 indica, portanto, uma semelhança entre o desempenho dos alunos nas questões de Compreensão do Algoritmo com seu desempenho nas questões de Sistema de Numeração. Assim, o aluno que compreende a estrutura do Sistema de Numeração demonstra também uma boa compreensão dos procedimentos utilizados no algoritmo.

### Análise das entrevistas

Havíamos previsto entrevistar alguns alunos da amostra, logo após a correção do teste definitivo, no sentido de perceber os processos que os levaram a determinado tipo de erro. Contudo, devido a um atraso na correção dos testes, não foi possível realizar essas entrevistas com os mesmos alunos. Fizemos então as

entrevistas com alunos do mesmo nível, de quem esperávamos o mesmo tipo de erro. Selecionamos para as entrevistas as questões do teste que apresentaram um elevado índice de dificuldade, ou uma grande diversidade de erros, assim como questões que deram margem a dúvidas na correção.

Realizamos um total de 21 entrevistas, sendo 15 com alunos de 3ª e 4ª séries e 6 com alunos de 5ª e 6ª séries. Não sentimos necessidade de ampliar esse número, uma vez que as respostas que estávamos obtendo começaram a se tornar repetitivas.

As entrevistas mostraram-se muito importantes para a análise, fornecendo subsídios para uma melhor interpretação dos resultados da pesquisa e permitindo o levantamento de hipóteses complementares que deveriam ser confirmadas, ou não, pela análise estatística.

Ainda com as entrevistas pudemos identificar estratégias que levaram a alguns erros e identificar erros motivados pela falta de compreensão do enunciado. Identificamos, ainda, como um procedimento didático pode estar reforçando um erro.

Notamos, também, alguns fatos que nem sempre são levados em consideração no processo ensino-aprendizagem. Por exemplo, quando o aluno é confrontado com uma situação de problema com história num contexto prático, o mesmo tem mais facilidade de chegar à resposta correta, principalmente se lhe for permitido resolver "de cabeça".

A solução oral torna-se mais simples do que a escrita porque o aluno não fica preso à técnica do algoritmo. Numa situação de "lápiz e papel", os números envolvidos perdem seu significado, e a preocupação passa a ser com as regras para alcançar o resultado.

Observamos ainda, tanto no teste como nas entrevistas, que quando um aluno resolve um exercício, ele não volta para conferir o resultado. Contudo, no momento da entrevista, em que o aluno era solicitado a explicar o que fez, muitos deles percebiam soluções erradas e corrigiam suas respostas.

## IMPLICAÇÕES PARA O ENSINO

Com este trabalho tivemos a oportunidade de identificar alguns aspectos importantes que fornecem subsídios para elaborar propostas alternativas para alguns procedimentos utilizados no ensino da subtração e do sistema de numeração.

Consideramos que a contribuição mais significativa de nosso trabalho para o aperfeiçoamento do processo ensino-aprendizagem em Matemática vem das discussões sobre o papel da análise de erros na avaliação do processo de ensino, como orientador da aprendizagem e na definição de etapas de ensino.

Na discussão dos resultados sobressaíram alguns aspectos já apontados por outros autores que, entretanto, em geral, ainda não estão presentes na sala de aula na medida em que seria necessário. Por exemplo, os procedimentos seguintes podem contribuir para minimizar a incidência de erros e, conseqüentemente, favorecer a compreensão:

- fazer a introdução de um conteúdo através de situações práticas, ou próximas da vivência do aluno;
- variar a forma de apresentar e enunciar os problemas;
- dar oportunidade ao aluno de resolver os problemas "de cabeça", discutindo as estratégias por ele utilizadas;
- confrontar essas estratégias com os procedimentos formais;
- avaliar sempre os resultados obtidos em função de sua coerência com os dados.

### A análise de erros definindo etapas de ensino

A análise de erros deu-nos elementos para identificar níveis de dificuldade que poderão dar subsídios para a definição de etapas a serem seguidas no ensino.

Com respeito à técnica do algoritmo (contas), conseguimos detectar claramente uma graduação em níveis de dificuldades, graduação essa que já não apareceu tão evidenciada com relação à compreensão do sistema de numeração. Entretanto, levantamos algumas dificuldades relativas à compreensão do sistema de numeração, que devem ser levadas em consideração no processo ensino-aprendizagem desse conteúdo.

Grosso modo, podemos identificar quatro níveis de dificuldade nas contas de subtração:

- Nível 1 - Contas sem empréstimos;
- Nível 2 - Contas com um empréstimo;
- Nível 3 - Contas com pelo menos dois empréstimos;
- Nível 4 - Contas com empréstimo do zero, para o zero e outra dificuldade.

Esses níveis não têm uma demarcação muito rígida. Por exemplo, no nível 1 encontramos alguns casos de empréstimos muito simples (pseudo-empréstimos); no nível 3 podemos encontrar empréstimos do zero em casos especiais.

Sem dúvida a maior dificuldade nas contas está relacionada a uma situação de empréstimo, quer no fazer o empréstimo, quer no tentar evitá-lo. A ordem (unidades, dezenas, centenas...) onde se faz o empréstimo não aparece como fator determinante na graduação de dificuldades das contas. Ao contrário, o aparecimento de um 0 (zero) numa situação de empréstimo aumenta a incidência de erros. Nessa situação, o zero aparece como um elemento "complicador"; contudo, ele pode também desempenhar um papel "simplificador" das contas, por exemplo, quando ele aparece em dezenas, centenas etc. exatas no minuendo.

Vale destacar ainda a dificuldade com a situação de empréstimo quando este deve ser feito de uma coluna de algarismos iguais, por exemplo:  $608 - 209 =$  e  $5391 - 2697 =$ . Essa situação parece induzir o aluno ao erro, evitando o empréstimo. Essa situação, acrescida do aparecimento do zero como na primeira conta, deixa ainda transparecer a influência do zero como elemento "complicador".

De fato, observamos que o zero só tem o efeito de agravar outras dificuldades já existentes; ele não constitui por si só uma dificuldade significativa.

As observações que acabam de ser feitas deveriam ser tomadas em consideração quando da definição de etapas para aprendizagem da técnica do algoritmo da subtração.

Embora não tenhamos identificado níveis de compreensão do sistema de numeração, verificamos que alguns aspectos dessa compreensão ainda não estão totalmente garantidos, nem na 5ª nem na 6ª séries. Por exemplo, verificamos que esses alunos ainda apresentam dificuldades relacionadas com a decomposição de um número e o reagrupamento de duas das suas ordens numéricas.

Cabe, portanto, alertar os professores das séries iniciais para o fato de a compreensão do sistema de numeração ir acontecendo de uma forma gradual ao longo do 1º grau. Assim, não se justifica a expectativa, usual em professores de 5ª série, de receber alunos já "dominando" a compreensão da estrutura do sistema de numeração.

Nosso sistema de numeração é fundamentado no princípio posicional de base 10. As idéias fundamentais inerentes a sua estrutura são: o agrupamento, o valor posicional, a idéia aditiva e a multiplicativa. Portanto, essas são as idéias que devem ser exploradas nas séries iniciais no processo de ensino do sistema de numeração.

Essas idéias já vêm sendo trabalhadas, sobretudo na 1ª e 2ª séries, na forma tradicional, com questões canônicas, específicas de sistema de numeração como, por exemplo, representação de um número no Quadro Valor de Lugar, e decomposição de um número em suas diferentes ordens. Temos observado, em nossa prática e na literatura, que a estrutura multiplicativa inerente ao princípio posicional de nosso sistema apresenta dificuldades nesse nível de ensino,



as quais nem sempre são percebidas pelos professores.

No sentido de desenvolver essa estrutura multiplicativa e preparar a compreensão do sistema de numeração, poderiam se trabalhar outros agrupamentos diferentes de agrupamentos de 10 e suas potências, como por exemplo, perguntando: quantas dúzias tem? quantos sobram? quantas semanas? quantos dias? etc.

Além disso, o trabalho com agrupamentos de 10 e suas potências deveria ser ampliado com exercícios diversificados, como, por exemplo, os exercícios que utilizamos em nosso teste e que consideramos não-canônicos.

Por outro lado, o ensino dos algoritmos das operações, que se inicia desde a 1ª série, também vem contribuir para o aprofundamento da compreensão da estrutura de nosso sistema de numeração. Esse fato, nem sempre evidenciado no processo de ensino nas séries iniciais, aparece na análise de correlações, que mostrou uma estreita ligação entre Compreensão do Sistema de Numeração e Compreensão do Mecanismo do Algoritmo.

Tudo o que foi dito sugere que a preocupação com a compreensão da estrutura do sistema de numeração deve estar presente pelo menos até a 5ª série, não necessariamente de forma específica. Por exemplo, na 5ª série, uma discussão sobre o que muda nos critérios de divisibilidade, quando muda a base do sistema de numeração, viria contribuir para o aprofundamento da compreensão do sistema de numeração.

### O erro como orientador da aprendizagem

Esta pesquisa deu subsídios para propor, junto aos professores, que passem a encarar o erro dos alunos de uma maneira mais positiva.

Ocorre, em geral, numa avaliação tradicional, que o professor verifica tão-somente se o aluno domina determinado conteúdo. Não há um questionamento mais profundo sobre a origem e significado do erro cometido pelo aluno. Por exemplo, não são levantadas questões do tipo:

- o aluno comete sistematicamente o mesmo erro, nas mesmas situações, ou a cada hora ele reage de um modo diferente a essas situações?

- é possível explicar por que o aluno cometeu um determinado erro? Existe alguma lógica por trás dele?

- o próprio processo de ensino poderia estar induzindo o aluno a determinado erro?

Quando esses questionamentos estão presentes, então a função do erro passa a ser mais uma questão de avaliação do procedimento de ensino do que de uma avaliação de fixação de conteúdo. Com essa característica, ele servirá como orientador do processo de ensino.

### CONCLUSÃO

Consideramos que os resultados da pesquisa vêm trazer uma contribuição significativa para o processo ensino-aprendizagem em Matemática nas séries iniciais. Essa contribuição vai além de uma simples discussão da análise de resultados, apontando para desdobramentos que vão dar subsídios à elaboração de propostas para o ensino de Matemática.

É nosso interesse manter em futuras pesquisas a mesma direção que demos a este trabalho, uma vez que a literatura existente na área tem-se mostrado rica na apresentação de propostas de ensino de uma forma mais abrangente, nem sempre procurando respostas fundamentadas para certos questionamentos básicos.

O modo como encaramos a análise de erros resultou num instrumento eficaz para imprimir a direção desejada a este trabalho. A análise de erros vista desta forma dá um novo significado ao erro do aluno, como revelador das dificuldades, e não apenas como avaliador do desempenho. Muito embora esse novo modo de encarar o erro já seja encontrado na literatura existente, em nossa prática e em encontros com professores observamos que ele ainda não está presente no cotidiano da sala de aula. Essa forma de encarar o erro merece um aprofundamento e será objeto de outro artigo.

Apesar de termos trabalhado com a subtração nas séries iniciais, podemos estender a análise de erros para outros conteúdos e outros níveis de ensino.

---

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

BARUK, Stella. *L'âge du capitaine*. Paris : Seuil, 1985.

BURTON, Richard. Diagnosing bugs in a simple procedural skill.

In: SLEEMAN, Derek, BROWN, John S. (eds.) *Intelligent tutoring systems*. New York : Academic Press, 1982.

CARRAHER, Terezinha, CARRAHER, David, SCHLIEMANN, Ana Lúcia. *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo : Cortez, 1988.

FISCHER, Jean Paul. *La perception des problèmes soustractifs aux débuts de l'apprentissage de la soustraction*. Nancy, 1979. Thèse (3<sup>e</sup> cycle) Université de Nancy I.

HART, Kathleen M. (ed.) *Children's understanding of mathematics: II*. Londres : John Murray, 1981.

KAMII, Constance, DeCLARK, Georgia. *Reinventando a aritmética: implicações da teoria de Piaget*. Campinas : Papirus, 1986.

VERGNAUD, Gérard A. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In: CARPENTER, T.P., MOSER, J.M., ROMBERG, T. A. *Addition and subtraction: a cognitive perspective*. Hillsdale (N.Y.) : Erlbaum, 1982.