O professor-pesquisador diante da produção escrita dos alunos

Teacher-researchers' use of their students' written work

Beatriz Silva D'Ambrosio[1]

Resumo

Com base no construtivismo radical de von Glasersfeld, foi possível estabelecer a fundamentação teórica para justificar a escrita de alunos como material informativo para seus professores. Definimos os professores construtivistas como professores-pesquisadores que criam modelos a partir da matemática dos alunos, planejando para eles atividades baseadas nesses modelos. Esse professor-pesquisador se propõe a fazer uma leitura hermenêutica da escrita dos estudantes, o que requer uma disposição para dar razão a eles. Tal leitura leva o professor a perceber como os alunos estão construindo conhecimento e também a aprofundar a sua própria compreensão da matemática. Foi utilizada a produção escrita de alunos para descrever o processo de leitura do professor-pesquisador que trabalha com uma postura construtivista.

Palavras-chave: Aprendizagem matemática. Construtivismo. Escrita. Leitura.

Abstract

The radical constructivism of von Glasersfeld (1990, 1991) is used as the theoretical framework that justifies the use of student writing to inform teachers. The constructivist teacher is a teacher-researcher who creates models using the mathematics of their students to plan instructional activities based on these models. The teacher-researcher reads hermeneutically the writing of students, which requires a certain disposition in order to give reason to those students. The hermeneutic reading helps the teacher understand how students are constructing knowledge, as well as potentially providing the teacher with new approaches to mathematical problems. In this paper, we use student writing to describe the reading process used by a teacher-researcher who works within a constructivist paradigm.

***Keywords**: Mathematical learning. Constructivism. Writing. Reading.*

Introdução

Definiu-se o papel da escrita e o das narrativas, tomando como referencial teórico o ensino construtivista (Steffe & D'Ambrosio, 1995) fundamentado no construtivismo radical de von Glasersfeld (1990, 1991). Steffe e D'Ambrosio (1995, p.148, tradução minha) usaram o termo "professor construtivista" para se referir a professores que "Estudam as construções matemáticas de seus alunos

[1] Doutora, Miami University, Department of Mathematics. 123 Bachelor Hall. 45056, Oxford, OH. USA. *E-mail*: <dambrobs@miamioh.edu>.

e que interagem com eles num espaço de aprendizagem cujo desenho é baseado, pelo menos em parte, num modelo em desenvolvimento do conhecimento dos alunos"[2].

O professor construtivista entende o conhecimento de seus alunos como resultado das ações realizadas por eles e das reflexões que eles fazem sobre elas para organizar o seu mundo experiencial (Steffe & Kieren, 1994). A acomodação e a assimilação definidas por Piaget são operações que levam o sujeito a construir novos esquemas e novas maneiras de operar para resolver situações que, até então, não podia solucionar de maneira completa e inquestionável por não possuir estruturas cognitivas suficientemente sofisticadas. O professor construtivista constrói um modelo de segunda ordem de seus alunos e trabalha para a constituição do modelo de um sujeito epistêmico, que representa o saber do professor relativo à compreensão de seus alunos sobre determinado conteúdo. É chamado de modelo de segunda ordem, pois o modelo de primeira ordem é o que existe no sujeito e só é acessível a ele próprio. Qualquer descrição do conhecimento alheio só pode ser um modelo de segunda ordem, pois é uma construção interpretativa, feita por outro que não o sujeito, geralmente o pesquisador e/ou o professor. O professor construtivista, assim como o pesquisador construtivista, procura criar modelos do processo construtivo e o entende como resultante da reflexão do sujeito sobre provocações causadas pelo ambiente, o que, muitas vezes, inclui interações com outros indivíduos.

De acordo com Cobb e Steffe (1983, p.91, tradução minha):

> Por um lado, os modelos devem ser suficientemente gerais para explicar o progresso matemático de outras crianças. Por outro lado, eles devem ser suficientemente específicos para descrever o progresso de uma criança específica num ambiente de ensino particular[3].

Ressalta-se que o professor construtivista não espera uma construção prevista de antemão. Ele entende que o conhecimento se estabelece para o sujeito como saber, quando é viável para resolver os problemas encontrados. Quando deixa de ser viável, ou seja, quando não proporciona ao sujeito meios de solucionar a situação enfrentada, este procura novos caminhos, novas interpretações, novos meios de operar - novas construções. O papel do professor é justamente buscar situações problemáticas que tenham o potencial de adicionar novas perspectivas ao conhecimento do aluno, conduzindo-o a um novo estado de viabilidade. Uma situação será problemática quando tiver o potencial de desequilibrar os saberes viáveis, aos quais o sujeito recorre ao resolver situações problemáticas.

Neste trabalho, diante da perspectiva do professor que adota um olhar construtivista para o aprendizado de seus alunos, discutimos a importância da escrita. Não se pode discorrer sobre a escrita de alunos sem pontuar a leitura como um processo hermenêutico de "ouvir" e interpretar o que o estudante procura comunicar. De acordo com Weissglass (1990), o ensino construtivista requer que o professor pratique um ouvir construtivista (*constructivist listening)*, no qual o trabalho do ouvinte está a serviço dos objetivos e das ideias do falante. Quem ouve apoia quem fala muitas vezes em silêncio, mas com empatia, ajudando-o a elaborar e a criar uma estrutura de saber mais útil e satisfatória.

Em trabalho anterior (D'Ambrosio, 2004), sustentando-se no trabalho de Davis (1996), foram descritas três diferentes formas usadas por professores ao ouvirem a voz de seus alunos. Alguns ouvem para avaliar e, nessas situações, estão procurando a resposta correta, valorizam-na e querem mudar o pensamento dos alunos incapazes de produzir essa resposta.

Outra forma de ouvir tem o objetivo de interpretar a solução do aluno. Esse professor tenta compreender o que o aluno está pensando, faz a ele

[2] "study the mathematical constructions of students and who interact with students in a learning space whose design is based, at least in part, on a working knowledge of students' mathematics".

[3] "On the one hand, the model should be general enough to account for other children's mathematical progress. On the other hand, it should be specific enough to account for a particular child's progress in a particular instructional setting".

muitas perguntas para entender qual o seu equívoco, para, então, poder criar situações que o levem a corrigir o seu erro. Esse professor também busca guiar o aluno a respostas e a construções matemáticas corretas, já determinadas. Em ambos os casos, a matemática a ser aprendida é a acadêmica formal, que existe e está pronta para ser absorvida pelos alunos. Esses professores sabem essa matemática e a transmitem a eles de uma forma ou de outra. Para ambos, o objetivo é eliminar erros na produção matemática do aluno.

Já uma terceira maneira de ouvir é a hermenêutica, na qual o professor ouve a voz discente, acreditando que ele próprio, professor, possa aprender algo novo. De acordo com Davis (1996, p.53, tradução minha), "Essa forma de ouvir [hermenêutica] requer a negociação, é cativante e confusa, e envolve o ouvinte e o falante em um projeto compartilhado"[4]. O professor que assim ouve está disposto a reconstruir a sua própria compreensão da matemática e a desafiar a sua forma de entender certos conceitos, como consequência de sua interação com seus alunos na construção conjunta do conhecimento. Esse professor considera e aceita a matemática do aluno e entende que seu trabalho docente é de pesquisa, em busca de aprender essa matemática, certamente diferente da sua própria, mas que é tão importante conhecer quanto à matemática acadêmica. Por meio do estudo da matemática dos alunos, o professor elabora situações problemas para investigarem juntos, pois acredita que os estudantes produzirão soluções novas que ele, até então, não considerou.

O docente continua examinando as estruturas, os esquemas e a lógica da matemática do aluno e se interessa por momentos em que o saber deste parece se desestabilizar, pois esse é o momento em que o aluno elabora novos saberes para retomar um estado de equilíbrio com conhecimentos anteriores que se alteraram e se tornaram novamente viáveis. O professor está disposto a incorporar a matemática do aluno como elemento do seu próprio saber matemático. A nosso ver, aí ocorre o ouvir construtivista proposto por Weissglass (1990): as perguntas são sinceras e autênticas tentativas de entender a maneira de pensar do aluno, não de diminuir o valor de sua contribuição, ou de sua fala, ou de buscar substituir o seu pensar por outro mais coerente com a matemática acadêmica.

Portanto, a postura do professor construtivista e a coerência de seu trabalho docente invalidam a afirmação de que os alunos não conseguem entender a matemática.

Acreditar ou duvidar da produção do aluno?

Neste trabalho, entende-se que o professor tem acesso ao pensamento do aluno e à sua voz tanto por meio de suas articulações orais quanto de sua produção escrita. A postura hermenêutica, ao ler a produção escrita do aluno, é um ato de "ouvir" a voz deste, pois escrever é uma forma de comunicar ideias.

O trabalho de análise da escrita desenvolvido por Elbow (1986), professor de redação em nível universitário, e interpretado na Educação Matemática por Harkness (2009) corrobora nossa perspectiva dentro de outra fundamentação teórica que converge com a nossa, no que diz respeito ao potencial de aprendizagem, quando se dá ouvidos aos alunos, dando-lhes razão. Para Elbow (1986), o professor deve trabalhar com o estudante de duas formas: usando uma *metodologia de acreditar* e uma *metodologia de duvidar*. De acordo com Harkness (2009), o uso de um equilíbrio entre as duas formas de analisar a produção do aluno gera maiores oportunidades de aprendizagem. A metodologia de duvidar é a mais comum entre professores de matemática e envolve ouvir de forma avaliativa, duvidando que haja razão na produção do aluno quando a resposta difere da do professor ou mesmo quando o procedimento se distingue daquele previsto por este. A metodologia de acreditar é algo que se percebe pouco na aula de matemática. Nessa, o professor tenta confiar na produção do aluno no que, nela, possa haver de correto e viável. Ouvir acreditando pode resultar em novas perspectivas para o professor e acrescentar novas dimensões ao seu saber.

---

[4] "This form of listening [hermeneutic listening] is more negotiatory, engaging, and messy, involving the hearer and the heard in a shared project."

Harkness (2009) dá exemplos de momentos em que ouvir acreditando gera uma nova construção matemática para o professor e amplia o âmbito de soluções possíveis, aumentando a oportunidade de envolvimento dos alunos e valorizando suas soluções. Recortou-se um dos exemplos de Harkness (2009, p.257), do qual foi feito um resumo, para ilustrar o contraste entre ouvir acreditando e ouvir duvidando:

> Numa classe onde os alunos jogavam cartas para comparar frações, cada um virava uma carta de um baralho com frações, e aquele que tivesse a maior fração levava todas as cartas. Depois de jogarem, a professora pediu voluntários para explicar como decidiram qual seria a maior fração. Duas propostas foram dadas: uma de achar o denominador comum e outra de usar a calculadora e determinar a representação em decimais, para então compará-las. Uma terceira proposta apareceu: o aluno descreveu seu método como sendo o de examinar o denominador, pois o menor denominador pertence à maior fração. O professor respondeu: "Cuidado! Nós sabemos que esse método não funciona".

Nesse episódio, foi possível perceber que o professor ouviu duvidando, comparando a produção do aluno ao que ele esperava. Com sua ação, pretendia modificar a maneira de pensar desse e de qualquer outro aluno que estivesse pensando da mesma forma. Alternativamente, o professor que tivesse ouvindo acreditando exploraria a sugestão desse aluno com o mesmo interesse com que tinha ouvido as outras propostas. Um possível caminho seria explorar o quanto a proposta do aluno estava correta e servia para comparar frações. Com um pouco de investigação, encontrariam comparações com numerador comum, algo pouco explorado no currículo, mas obviamente útil para alunos que pensam como esse terceiro. Ouvir acreditando teria o potencial de expandir o horizonte tanto do professor quanto dos alunos. Causaria, também, o efeito de comunicar aos alunos que a maneira de pensar de cada um pode desencadear toda uma investigação matemática, com frutos para todos da sala de aula. A postura do professor de ouvir acreditando exemplificaria, também, para todos, uma forma de escutar a contribuição do outro com respeito.

Acreditar ou duvidar diante da produção escrita do aluno

O trabalho como professor-pesquisador construtivista está no foco desta discussão. Essa pesquisa será apresentada na tentativa de ilustrar a construção de um trabalho docente baseado no desenvolvimento dinâmico do modelo da matemática dos alunos relativo à compreensão da razão inversa. Para os professores-pesquisadores, as linhas entre a pesquisa e o trabalho docente são nebulosas e é impossível separá-las. Nosso ofício é um constante vaivém - dos dados analisados às decisões tomadas -, para dar continuidade ao trabalho com alunos. Assim que deliberada a movimentação na prática, novos dados emergem e novas análises são necessárias. Essa dinâmica de trabalho constitui o dia a dia do professor-pesquisador. Discutir separadamente a análise de dados e a implicação dessa análise para o trabalho docente seria um tratamento artificial dos dados e não comunicaria ao leitor o constante movimento que resulta no tecer do saber do professor.

As exigências da produção escrita acadêmica criam relatos que não são capazes de expressar a verdadeira metodologia de trabalho do professor-pesquisador. Com este texto procura-se, propositalmente, romper com o tradicional relato de pesquisa e narrar como ela de fato ocorreu no dia a dia, em colaboração com os alunos. Para tanto, a descrição da análise dos dados (produção escrita dos alunos) insere-se na discussão do trabalho docente como realmente ocorre.

Pode-se analisar a produção escrita dos alunos de forma semelhante ao processo de ouvir: duvidando ou acreditando. Examine o seguinte episódio de ensino nos Estados Unidos da América numa classe de jovens de 12 anos (correspondente ao 7º ano do Ensino Fundamental no Brasil). Colaborou-se no ministrar das aulas de matemática desses alunos, durante dois anos, como professora-pesquisadora.

Este relato é um recorte do trabalho docente de pesquisa sobre a construção do conhecimento matemático dos alunos. O objetivo era entender como eles atribuíam significado a conceitos matemáticos para que se pudesse, munido de um modelo da matemática do aluno, propor situações problemas que os levassem a desenvolver novas maneiras de pensar e novos significados.

Sem nenhuma instrução, deu-se aos alunos o seguinte problema: *"Oito pessoas constroem um muro em 6 dias. Em quantos dias 12 pessoas construirão o mesmo muro*?"

Eles discutiram a questão em pequenos grupos e depois produziram suas soluções escritas individualmente. Ao leitor é lembrado que nessa idade (7º ano do Ensino Fundamental), nos Estados Unidos da América, onde ocorreu esta experiência, as crianças ainda não haviam estudado proporções de maneira formal e simbólica. Procurava-se investigar, com essa situação problema, as ideias disponíveis aos alunos para começarmos o trabalho com razão e proporção de forma intuitiva e construtiva.

Foram propostas diversas soluções. Apresenta-se a seguir a produção escrita de alguns dos alunos. Para esta discussão, fez-se uma seleção representativa do pensamento dos componentes deste grupo. O objetivo era obter dados para o desenvolvimento de um primeiro modelo sobre as estruturas multiplicativas (Vergnaud, 1988) disponíveis aos alunos. Considerando experiências anteriores com alunos dessa idade e de uma leitura teórica sobre o pensamento multiplicativo, proporcional e fracionário, havia alguns elementos para iniciar a construção do modelo que daria direção ao trabalho com aquela turma e para justificar a escolha de situações problemas a serem propostas. O objetivo era fazer seleções propositais, que tivessem o potencial de problematizar o pensamento dos alunos, levando-os a uma maior reflexão sobre suas construções e ações. Para esta discussão, elegeram-se as produções escritas de quatro alunos, sobre as quais tiveram-se dúvidas e as quais levaram a refletir mais a fundo sobre a construção matemática deles.

Há duas maneiras de analisar esse material: duvidando ou acreditando. A análise com base na dúvida é aquela que vai procurar a resposta correta e apontar aos alunos o que fizeram de forma tanto matematicamente correta como matematicamente problemática. Com essa perspectiva, todos os alunos abaixo têm, em sua escrita, algo de matematicamente incorreto, ineficaz ou incompleto. Muitos professores propõem o uso de rubricas para avaliar produções escritas como essas.

Por outro lado, se considerar a produção e ouvir a voz do aluno, acreditando que é possível aprender com a sua construção de conhecimento a respeito de razões inversas, será também possível aprender muito e começar a elaborar um modelo do pensamento dos alunos, o que dará maior segurança ao escolher e a propor as próximas atividades para a turma. Esta é uma postura de professor-pesquisador construtivista.

Com o objetivo de dar razão aos alunos, far-se-á uma leitura acreditando que com isso se aprenderá muito sobre o pensamento deles e talvez algo sobre a matemática. Descobrir-se-á o que o aluno entende bem e, assim, o que poderá vir a ser instrumento para resolver esse problema de forma robusta e autêntica, apoiando-se em novas construções matemáticas. Os trabalhos dos alunos servirão como dados para o modelo de segunda ordem que será construído e que dará fundamentação para o trabalho com os estudantes.

Num primeiro olhar, nota-se a facilidade com que, intuitivamente, os alunos percebem a relação inversa, na qual o maior número de trabalhadores resulta em menor número de dias para completar o muro. É importante apontar que, ao utilizar esse mesmo problema com adultos, o procedimento de regras de três, em muitos casos, leva os adultos a conclusões precipitadas e errôneas, já que confiam mais nos símbolos e nos procedimentos matemáticos do que no seu bom senso numérico. Porém esses jovens, não possuindo uma técnica matemática de resolução, usam o contexto para dar sustentação à sua forte intuição numérica. Esse é um aspecto positivo e muito importante, que vai sustentar a investigação continuada desse conceito matemático com essa turma.

Os alunos *A* (Figura 1) e *C* (Figura 2) usaram e descreveram uma relação importante entre as quantidades. A ideia de que o dobro de uma quantidade resulta na metade da outra é fundamental para esse problema (e outros desse tipo). A compreensão da relação inversa entre as quantidades como uma relação multiplicativa parece ser emergente com alguns dos alunos.

Já outros buscaram uma maneira de expressar a relação que, para eles, pareceu aditiva, como no caso da aluna *B* (Figura 3). Ela procurou uma relação entre 12 e 8 pessoas, expressando-a como 8 pessoas + 4 pessoas, o que resultou em 12 pessoas. Dessa relação aditiva, alguns alunos tentaram exprimir o que acontecia com o número de dias de trabalho, buscando uma nova relação aditiva. A aluna *B* somou 1/3 do número de pessoas (1/3 de 12) a 8, então subtraiu um terço do número de dias (1/3 de 6), o que resultou em 4 dias.

Essa problemática, ou seja, a tensão entre o pensamento multiplicativo emergente e o aditivo, em questões desse tipo, está bem documentada, na literatura, por pesquisadores que trabalham com a evolução das estruturas multiplicativas. As experiências de adição muitas vezes atropelam a percepção de relações multiplicativas (alguns autores chamam de obstáculo epistemológico), pois a primeira tendência dos alunos, ao enfrentar problemas desse tipo, é expressar a relação como sendo aditiva.

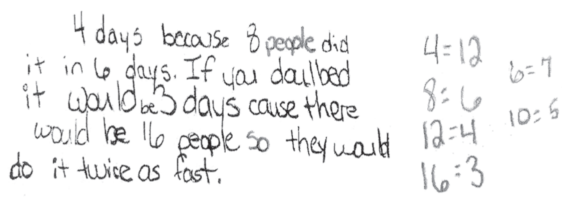
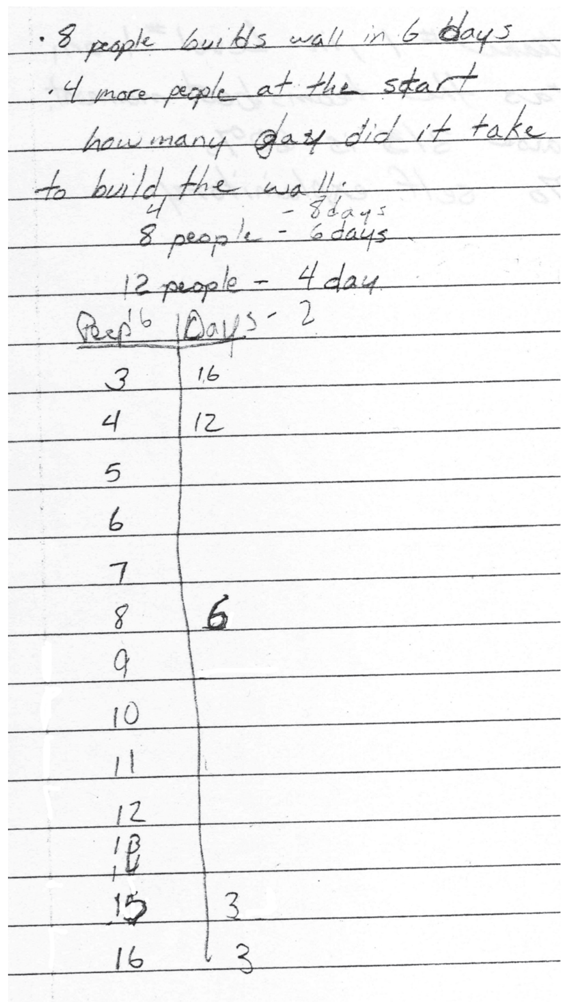
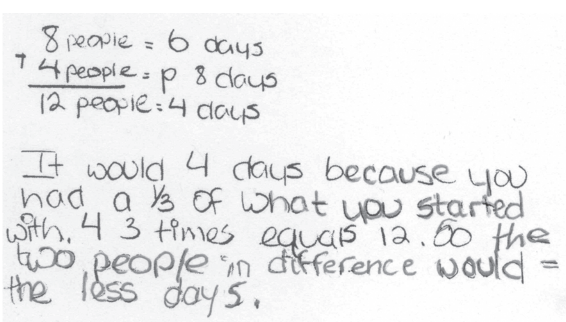

4 days because 8 people did it in 6 days. If you doulbed it would be 3 days cause there would be 16 people so they would do it twice as fast.
4=12
8=6
12=4
16=3
6=7
10=5

Figura 1. Aluno A.
Fonte: Arquivo próprio.
Nota: Tradução: *"4 dias, pois 8 pessoas fizeram em 6 dias. Se você dobrar seriam 3 dias, pois seriam 16 pessoas que o fariam duas vezes mais rápido"*.


• 8 people builds wall in 6 days
• 4 more people at the start
how many day did it take
to build the wall.
4 - 8 days
8 people - 6 days
12 people - 4 day

Peep 6	Days - 2
3	16
4	12
5	
6	
7	
8	6
9	
10	
11	
12	
13	
15	3
16	3

Figura 2. Aluno C.
Fonte: Arquivo próprio.
Nota: Tradução: *"8 pessoas constroem o muro em 6 dias; 4 pessoas no começo, quantos dias levou para construir o muro? 4 pessoas – 12 dias, 8 pessoas – 6 dias, 12 pessoas – 4 dias"*.


8 people = 6 days
+ 4 people = p 8 days
12 people = 4 days

It would 4 days because you had a 1/3 of what you started with. 4 3 times equals 12. So the two people in difference would = the less days.

Figura 3. Aluno B.
Fonte: Arquivo próprio.
Nota: Tradução: *"Levaria 4 dias, pois você tem um terço do tanto que começou. 4 três vezes é igual a 12. Então, a diferença de duas pessoas seriam menos dias"*.

Mesmo para os alunos que reconhecem que o dobro do número de pessoas resulta na metade do número de dias para completar o trabalho, a relação nem sempre se generaliza para a inversa, na qual triplicar uma quantidade resulta em um terço da outra, quadruplicar uma resulta em um quarto da outra e assim por diante. Essa preocupação ficou bem clara quando se examinou o trabalho dos alunos ao resolverem este outro problema proposto:

> *Um grupo de 10 escoteiras foi acampar, com comida suficiente para 8 dias. Ao chegarem ao acampamento, juntaram-se a elas mais 5 escoteiras, que não levaram mais comida. Quantos dias poderão acampar, se cada menina recebe, por dia, a mesma quantidade de comida que haviam planejado para o passeio?*

Apareceram algumas soluções que intrigaram e acrescentaram mais dados ao modelo emergente sobre a matemática das criança, justamente no que diz respeito à generalização da relação multiplicativa. Ao pensarem sobre esse segundo problema, alguns alunos usaram um raciocínio semelhante ao anterior. *"Se 10 escoteiras têm comida para 8 dias, então 20 terão comida para 4 dias. Como 15 está exatamente na metade de 10 e 20, então o número de dias também estará exatamente na metade entre 8 e 4 dias, ou seja, para 15 escoteiras haverá comida para 6 dias"*. Nesse caso, está claro que dobrar uma quantidade resulta na metade da outra, porém, em seguida, a tomada do ponto médio das duas quantidades implica a compreensão da relação como linear. Embora, na relação de quantidades proporcionais, o ponto médio seja bem importante e relevante, já que a relação é linear, no caso de razões inversas, ele não se comporta da mesma maneira. Foi possível perceber que a busca de relações aditivas, que até então vinha resolvendo problemas multiplicativos para os alunos, interferiu na solução das relações inversas. O seu modo de operar (de forma aditiva) não é viável para resolver problemas de razão inversa, já que a relação não é linear. Portanto, parece que se encontrou uma das questões-chaves a serem problematizadas com os alunos.

Voltando ao problema anterior, os dois alunos *A* e *C* (Figuras 1 e 2, respectivamente) organizaram suas informações na forma de tabela. Notou-se o uso do símbolo da igualdade para comunicar ou anotar algo diferente da forma como os matemáticos o usariam. Porém, acreditar na matemática da criança, ao ler sua solução, requer esforço para entender como elas se apropriam do símbolo para comunicar uma ideia. Se o objetivo é compreender como o aluno pensa, deve-se esforçar para aceitar a sua linguagem e ouvir o que ele procura comunicar. A forma de tabela para organizar informações é uma representação útil para ser trabalhada em aulas futuras, pois alguns alunos já se apropriaram dessa representação. O preenchimento da tabela proposta pelo aluno *C*, juntamente com um gráfico da relação, poderá problematizar a linearidade na relação das quantidades ainda antecipada por muitos alunos.

Algo que também começou a aparecer na escrita dos alunos *A* e *C* foi a simetria das relações. O preenchimento de mais algumas células da tabela do aluno *C* poderá despertar o interesse para o fato de que 4 pessoas levam 12 dias para completar o muro e 12 pessoas levam 4 dias. Esse fato já havia aparecido na tabela do aluno *A* e começou a surgir na tabela do aluno *C*. O que num primeiro momento pode ser mera curiosidade, com um pouco de incentivo pode se tornar uma interessante investigação, que dará subsídios para o aluno concluir que o produto das duas quantidades deva ser uma constante. Algo que vai se manifestar de novo, quando investigarmos a representação motivada pela produção do aluno *D* (Figura 4).

O aluno *D* (Figura 4) oferece ainda outro elemento para descrever a complexidade do problema e do seu pensamento. Ele parece estar tentando criar uma imagem do muro a ser construído. Essa análise ajudou a construir uma representação que pudesse ser útil para a solução do problema. Entendendo a tensão do pensamento aditivo revelado na sua escrita, com algum indício de que a relação de metade do número de pessoas possa resultar no dobro do número de dias. Foi cogitada uma maneira de aproveitar o esforço do aluno para elaborar um desenho que pudesse levar à solução do problema. Ouvir acreditando valorizou o esforço do aluno e, em colaboração com outros, surgiu uma imagem útil - usada de novo no problema da divisão de comida para as escoteiras -, para a solução do problema de construção do muro.

Colaborando uns com os outros, os colegas geraram uma imagem que comunicava com mais clareza aquilo que o aluno *D* buscava. Juntos criaram o muro abaixo (Figura 5), em que cada coluna representa o trabalho de um construtor e está dividida em 6, correspondendo aos 6 dias de trabalho. Cada retângulo pequeno equivalia a "um tijolo" colocado por cada trabalhador a cada dia. O tijolo representava o trabalho de cada pessoa num dia. Como o muro seria do mesmo tamanho, num segundo momento, seria construído por 12 pessoas. Então, a parte pintada passou a representar o quanto do muro seria construído em um dia se 12 pessoas trabalhassem juntas, colocando um tijolo por dia. A solução usando essa imagem ajudou muitos alunos a se convencerem de que 12 pessoas levariam 4 dias para construir o muro.

Esse momento foi muito importante para o aluno *D*, pois sua ideia serviu de inspiração para outros colegas. Se o professor tivesse ouvido duvidando das soluções dos alunos dificilmente teria incentivado o aluno *D* a colocar a sua solução para ser discutida. Nunca é demais enfatizar a importância da valorização de todas as vozes numa sala de aula em que o professor procura apoiar a construção do conhecimento matemático. A solução do aluno *D* ofereceu importantes elementos para serem considerados por seus colegas que construíam o conhecimento sobre relações inversas: os alunos conseguiram imaginar a possibilidade de analisar esse tipo de problema com uma representação diferente; essa representação proporcionou para alguns deles uma forma alternativa de relacionar as quantidades do problema; surgiu a oportunidade de refletir sobre o significado da fração 1/48 para esta situação e de observar 48 como uma quantidade constante.

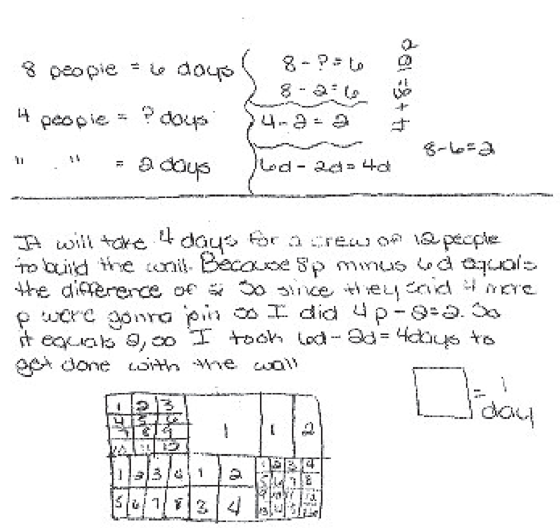


Figura 4. Aluno D.
Fonte: Arquivo próprio.
Nota: *Tradução:"Levará 4 dias para o grupo de 12 pessoas construir o muro. Porque 8p menos 6d é igual à diferença de 2. Então, como eles disseram que 4 p a mais iam se juntar ao grupo, eu fiz 4p-2 = 2. Então, é igual a 2, portanto eu peguei 6d-2d=2 dias para completar o muro".*

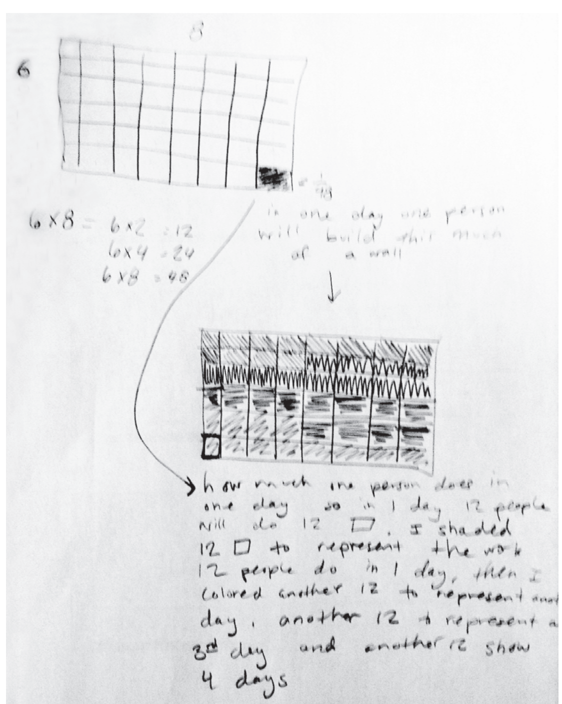


Figura 5. Representação desenvolvida em colaboração, inspirada na proposta do aluno E.
Fonte: Arquivo próprio.

A aluna *B* também conseguiu explicar com mais clareza o significado de sua percepção da fração de 1/3. Para ela estava evidente que 4, 8 e 12 estavam relacionados por terços. Com essa imagem, a sua resposta também ficou mais valorizada e ela recebeu uma confirmação de que havia algo de importante nesse fato percebido por ela. Mesmo que não tendo sido explorada de imediato, a imagem de como 1/3 se relaciona às quantidades trabalhadas neste problema foi importante para pensar no fato de que 8 x 1,5 resulta em 12, e, portanto, a fração inversa (2/3) pode servir para encontrar os dias de trabalho relativos a 12 pessoas.

O que se ouve, quando se acredita na produção do aluno, informa a respeito do conhecimento que ele leva para a escola e da sua forma de raciocinar; além de ter enriquecido o modelo da matemática das crianças e dado direção para planejar novas ações. As possibilidades para a continuidade do processo de ensino foram definidas pela reflexão sobre a produção matemática dos alunos. O modelo dinâmico, que se altera a cada nova descoberta, se desenvolve a partir da voz dos alunos e propicia aos professores elementos de investigação. O trabalho do professor-pesquisador pode ser descrito como o trançar de pesquisa e ação com reflexão contínua. O exemplo acima é um pequeno recorte da pesquisa-ação de um professor-pesquisador.

Conclusão

As consequências do trabalho do professor-pesquisador que dá voz e razão ao aluno quando analisa sua produção escrita são muitas e complexas. Esse professor-pesquisador junta elementos para desenvolver o modelo da matemática de seus alunos, o qual serve para sustentar o trabalho de sala de aula de, pelo menos, três maneiras essenciais. Primeiro, influencia a escolha de situações-problemas que serão colocadas para dar prosseguimento ao trabalho. Por exemplo, dada a coleção de produção dos alunos para o problema da construção do muro, escolhe-se uma proposta matematicamente semelhante, mas com um contexto diferente e valores numéricos que criassem novos desafios. Segundo, influencia não apenas a ordem em que serão desenvolvidas as discussões das soluções, mas também o foco desses debates. Tendo ouvido acreditando, encontrou-se a contribuição de cada aluno para a construção de uma compreensão robusta (completa, complexa e repleta de conexões) de possíveis soluções para o problema de construção do muro. Os professores-pesquisadores determinaram um propósito para cada solução apresentada, pois imaginavam um desencadear de conceitos matemáticos a serem discutidos. Terceiro, leva o professor a enriquecer seu repertório de possibilidades para uma situação problema e, às vezes, até a ampliar a sua própria compreensão da riqueza das relações matemáticas possíveis com um problema, modificando, assim, o seu conhecimento matemático.

Há também consequências que podem ocorrer para o aluno quando o professor ouve sua voz acreditando no valor matemático de sua produção. Primeiro, ele se sente membro integrante e valorizado da comunidade da sala de aula. Ele percebe que sua contribuição é levada a sério pelo professor e por seus colegas. Segundo, ele tem orgulho de suas descobertas e seus *insights*, tornando-se mais preocupado com a forma de se expressar para que todos o entendam. Terceiro, ele se torna interessado e participativo. Quarto, seguindo o exemplo do professor que ouve acreditando, ele aprende a ouvir a voz do outro e tenta relacionar a solução do outro à sua forma de pensar, o que, potencialmente, o leva a considerar novas possibilidades e novas construções.

Referências

Cobb, P.; Steffe, L. The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education,* v.14, p.83-94, 1983.

D'Ambrosio, B.S. Preparing teachers to teach mathematics within a constructivist framework: The importance of listening to children. In: Watanabe, T.; Thompson, D.R. (Org.). *The work of mathematics teacher educators*: Exchanging ideas for effective practice. San Diego: Association of Mathematics Teacher Educators, p.135-150. 2004.

Davis, B. *Teaching mathematics*: Toward a sound alternative. New York: Garland, 1996.

Elbow, P. *Embracing contraries*. New York: Oxford University Press, 1986.

Harkness, S.S. Social constructivism and the believing game: A mathematics teacher's practice and its implications. *Educational Studies in Mathematics,* v.70, p.243-258, 2009.

Steffe, L.; D'Ambrosio, B.S. Toward a working model of constructivist teaching: A reaction to Simon. *Journal for Research in Mathematics Education*, v.26, p.146-159, 1995.

Steffe, L.; Kieren, T. Radical constructivism and mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, v.25, p.711-733, 1994.

Vergnaud, G. Multiplicative structures. In: Hiebert, J.; Behr, B. (Org.). *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p.141-161.

Von Glasersfeld, E. An exposition of constructivism: Why some like it radical. In: Davis, R.; Maher, C.A.; Noddings, N. (Org.). *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics*. Reston: NCTM, 1990. p.19-29. (JRME Monograph, 4).

Von Glasersfeld, E. *Radical constructivism in mathematics education*. Dordrecht, NL: Kluwer, 1991.

Weissglass, J. Constructivist listening for empowerment and change. *The Educational Forum,* v.54, n.4, p.351-370, 1990.

Recebido em 29/10/2013 e aprovado em 10/12/2013.