

## Estrutura cognitiva dos alunos e aprendizagem conceptual da Matemática: contributos para o seu conhecimento através da técnica de Redes Associativas Pathfinder

**JOSÉ LUÍS CARVALHO, JOSÉ LUÍS RAMOS**

Centro de Investigação em Educação e Psicologia, Universidade de Évora, Portugal  
jlc@uevora.pt, jlramos@uevora.pt

**LUIS CASAS GARCÍA, RICARDO LUENGO GONZÁLEZ**

Grupo de Investigação CiberDidact, Universidade de Extremadura, Espanha  
luisma@unex.es, rluengo@unex.es

**Resumo:** Este artigo descreve uma experiência de aprendizagem que teve como objectivo contribuir para a compreensão da rede conceptual dos alunos no que diz respeito ao conhecimento de duas operações aritméticas (multiplicação e divisão), através do uso sistemático da plataforma PmatE.

Antes e depois da utilização do ambiente PmatE os alunos participantes foram sujeitos à avaliação dos conceitos matemáticos através da técnica “PathFinder Associative Networks” proposta por Schvaneveldt (1990), que gera matrizes de dados correspondentes à rede conceptual dos alunos relativas às operações em estudo. Estas matrizes de dados foram analisadas a diferentes níveis recorrendo ao programa SPSS. As aplicações CN\_MeBa e PATHFINDER foram usadas como ferramentas de representação do conhecimento conceptual relativo aos conceitos sob observação, durante o uso sistemático do ambiente PmatE pelos alunos participantes no estudo.

Os resultados sugerem diferenças ao nível das representações mentais que os alunos possuem acerca do conhecimento conceptual da multiplicação e divisão no início e no final da intervenção educativa. No que diz respeito à similaridade das redes dos alunos em comparação com a rede do professor, a análise efectuada indica que a variação entre os resultados obtidos antes e depois da experiência com PmatE não foi significativa.

As conclusões e limitações do estudo são discutidas sendo que os resultados sugerem que esta abordagem pode constituir um método útil para estudar e compreender as redes conceptuais dos alunos durante os processos de aprendizagem dos conceitos matemáticos, permitindo ao professor fazer a observação do progresso do aluno.

**Palavras-chave:** Inteligência artificial, métodos de representação do conhecimento, estrutura cognitiva, redes semânticas, Pathfinder Associative Networks.

### INTRODUÇÃO

Este estudo faz parte de um projecto de investigação mais vasto (Carvalho et al., 2007) que está a ser desenvolvido por investigadores das Universidades de Évora (Portugal) e Extremadura (Espanha) e visa estudar de que forma e em que medida a aplicação de estratégias didácticas que

façam um recurso sistemático ao PmatE<sup>1</sup> contribuem para desenvolver a estrutura cognitiva dos alunos do 4º ano de escolaridade do 1º Ciclo do Ensino Básico, no que se refere às operações aritméticas elementares.

Esta fase do estudo, que resumidamente abordaremos no espaço deste artigo, pretendeu alcançar os seguintes objectivos:

1. Explorar a estrutura dos conhecimentos dos alunos do 4º ano de escolaridade (idade média de 9 anos) no que concerne à relação conceptual entre a multiplicação e a divisão.
2. Conhecer as potencialidades de aplicação da técnica “Pathfinder Associative Networks” ao campo do conhecimento e da investigação em educação matemática.

Para além destes dois objectivos mais gerais foram enunciados outros dois, mais específicos:

1. Reconhecer os termos habitualmente mais utilizados pelos alunos, pelos professores e pelos manuais escolares durante o processo de aprendizagem das operações aritméticas elementares no 1º Ciclo do Ensino Básico.
2. Seleccionar os conceitos essenciais a aplicar nos testes conceptuais baseados na técnica “Pathfinder Associative Networks” (Schvaneveldt, 1990), a partir de agora traduzida e designada por “Redes Associativas Pathfinder”.

Em torno destes objectivos foram colocadas as seguintes questões de investigação:

1. Após a experiência educativa, é possível reconhecer diferenças entre as redes dos alunos no que diz respeito à sua coerência?
2. Após a experiência educativa, a estrutura cognitiva dos alunos torna-se cada vez mais semelhante à dos professores?

## CONHECIMENTO DA ESTRUTURA COGNITIVA

### A estrutura cognitiva e a aprendizagem

No actual “estado da arte” sobre o conhecimento acerca do funcionamento da mente humana é amplamente assumido que a informação está armazenada na memória de acordo com uma determinada organização.

Deste modo, o conceito de estrutura cognitiva assume uma particular importância. A estrutura cognitiva é entendida como uma construção hipotética que se refere à organização das relações entre os conceitos na memória semântica ou de longo prazo (Shavelson, 1972).

Nesta linha de pensamento, a aprendizagem pode ser concebida como a reorganização das relações entre os conceitos na memória semântica. As novas estruturas de conhecimento são construídas através da introdução de novos conceitos que se relacionam com os já existentes (Norman, 1976).

Com a formação de novas relações entre o conhecimento existente e o novo conhecimento, a estrutura cognitiva torna-se mais coerente e abrangente. Esta foi a ideia transmitida por Ausubel et al. (1983).

A investigação tem mostrado que, durante o processo de aprendizagem, a estrutura cognitiva dos alunos aproxima-se da do professor (Shavelson, 1972; Thro, 1978), de modo que a aprendizagem pode ser um processo (mental) em que a estrutura cognitiva do aluno se combina e adapta com a estrutura (lógica) do próprio conhecimento, mediada pela estrutura cognitiva do professor.

As várias estruturas de conhecimento não são integralmente transmitidas, pelo menos num primeiro momento, mas vão enraizando-se cada vez mais através de uma sucessão de aproximações iterativas durante o processo educacional.

<sup>1</sup> O ambiente PmatE (<http://www.pmate.ua.pt>), desenvolvido no âmbito do Projecto Matemática e Ensino da Universidade de Aveiro, é uma aplicação, disponibilizada em ambiente Web, que gera problemas de matemática baseados numa estrutura modular de enunciados e argumentos, ou seja, um “gerador” de testes e um sistema de gestão da aprendizagem (monitorização e registo de actividades e resultados dos alunos) entre outros aspectos. Os problemas criados apresentam formulações diferentes mas com a mesma estrutura e os mesmos objectivos, o que permite que dois computadores, trabalhando sobre o mesmo modelo, tenham sempre concretizações distintas.

Portanto, no âmbito deste estudo, importa dar a conhecer a mais recente teoria sobre aquisição e organização do conhecimento, a Teoria dos Conceitos Nucleares (Casas & Luengo, 2007), que oferece uma nova perspectiva para explicar como os processos de aprendizagem ocorrem na mente humana, e que serve de referencial teórico do nosso trabalho. Importa ainda perceber como é possível determinar as alterações da estrutura cognitiva dos alunos durante a aprendizagem e como essas mudanças podem ser armazenadas e representadas.

### **Teoria dos Conceitos Nucleares**

Esta teoria, que se alicerça em fundamentos das teorias de Ausubel (1968), Novak & Gowin (1984) entre outros, diverge delas ao considerar que a estrutura cognitiva dos alunos não se organiza de forma hierárquica em torno de conceitos mais gerais (conceitos inclusores) a partir dos quais emergem todos os outros, mas em torno de conceitos concretos que não são necessariamente os mais gerais. Considera ainda que à medida que a aprendizagem progride a estrutura cognitiva dos alunos transforma-se, paradoxalmente, numa estrutura mais simples. Para explicar estes factos os seus autores propõem a “Teorias da conceitos nucleares” cujos elementos principais são a “organização geográfica do conhecimento”, os “conceitos nucleares” e as “sendas de mínimo custo”. (Casas & Luengo, 2007)

Os conceitos nucleares são os que têm maior importância dentro da estrutura cognitiva dos alunos. Estes conceitos são aqueles que aparecem representados pelos nós múltiplos das “Redes Associativas Pathfinder”, técnica que descreveremos mais adiante. As “sendas de mínimo custo” são as relações de menor grau de complexidade, mas mais significativas, que os alunos vão progressivamente utilizando à medida que avançam na construção do conhecimento, apesar de na sua estrutura cognitiva aparecerem cada vez mais elementos e cada vez mais relacionados entre eles. A “organização geográfica do conhecimento” é uma metáfora para explicar que as redes cognitivas não são hierárquicas e, neste paradigma, não reflectem uma organização dos conhecimentos de mais a menos gerais.

No que diz respeito à importância dos conhecimentos prévios dos alunos, esta teoria converge com as teorias anteriores, nomeadamente a

teoria da aprendizagem significativa de Ausubel. Esta menção leva-nos a visitar a célebre frase deste psicólogo da educação: “Se eu tivesse que reduzir toda a Psicologia da Educação a um único princípio, formularia este: de todos os factores que influenciam a aprendizagem, o mais importante consiste no que o aluno já sabe. Investigue-se isso e ensine-se ao aluno de uma forma consequente.” (Ausubel, 1968, p. 59).

### **Representação da estrutura cognitiva**

No âmbito das Ciências Cognitivas tem vindo a ganhar interesse e importância as técnicas de análise e representação do conhecimento. Entre outras razões porque, a análise do conteúdo e a representação do conhecimento são relevantes para a planificação do currículo e do processo de ensino – aprendizagem, e porque o estudo das diferenças entre especialistas e aprendizes em domínios específicos relevaram que a quantidade e, sobretudo, a organização do conhecimento que se possui, são aspectos fundamentais que subjazem à conduta e à competência dos especialistas.

A análise dos processos e estruturas cognitivas tem-se centrado na representação e avaliação das estruturas cognitivas onde se armazena o conhecimento declarativo-conceptual que possuem os sujeitos sobre um domínio e, em menor medida, na análise de estratégias e processos de raciocínio que os sujeitos seguem nas actividades de pensamento em geral ou na resolução de problemas mais ou menos complexos do mundo real.

O quadro seguinte (Tabela 1), adaptado de Gilar (2003), sintetiza os principais procedimentos e técnicas de observação, representação e análise dos processos e estruturas cognitivas. Nele podemos distinguir as três fases fundamentais de aplicação destes procedimentos: 1) a obtenção e redução de dados; 2) a utilização de diferentes procedimentos de representação; 3) a análise quantitativa ou qualitativa dos dados.

**TABELA 1.** Procedimentos para análise do conhecimento

Técnicas de observação e revelação	Observação e medidas directas de execução		Acertos e erros, precisão, tempo de reacção, fixação ocular	
	Entrevistas		Métodos de incidentes e decisão crítica	
	Protocolos verbais		Entrevista retrospectiva Perguntas ou problemas-tipo Pensamento em voz alta Recordação estimulada Técnicas de grupo (“Delphi”)	
	Técnicas conceptuais baseadas em dados quantitativos		Associação de palavras Comparação de conceitos Classificação de cartões Construções gráficas	
Procedimentos de representação e análise	Procedi-mentos qualitativos	Conhecimento declarativo	Redes semânticas Mapas de conceitos (Novak & Gowin)	
		Conhecimento procedimental	Diagramas de fluxo Argumentos de Toulmin	
		Habilidades gerais e estratégias	Redes de planeamento (planning net)	
	Procedi-mentos quantitativos. Técnicas conceptuais	Métodos indirectos. Análise sobre matrizes de similaridade		Análise hierárquica de cluster Escalonamento multidimensional (MDS) <b>Redes Associativas Pathfinder</b>
		Métodos directos. Análise quantitativa sobre dados qualitativos		Agrupamentos de Monk Árvore ordenada
		Outros procedimentos		

Muitas destas técnicas fazem uso do conceito de similaridade semântica. A similaridade semântica é definida em função do número de propriedades que os conceitos têm em comum ou da forma (mais ou menos forte) que eles estão ligados por essas propriedades, ou seja, quanto mais ou menos relacionados eles se encontram. O suporte empírico para esta suposição está baseado num considerável corpo de investigação sobre a

memória, que tem mostrado que ideias estruturadas ou listas organizadas de ideias de acordo com algum tipo de proximidade semântica, são mais facilmente recordadas do que listas não estruturadas de ideias. Em suma, quanto mais significativa for a relação semântica entre as ideias, melhor elas serão lembradas (Tulving, 1967, Bower et al., 1969).

Muitos investigadores concordam que estes procedimentos permitem definir operacionalmente a estrutura cognitiva (Shavelson 1972, Fenker, 1975; Jonassen, 1987; Preece, 1976; Wainer & Kaye, 1974), identificar os conceitos-chave da estrutura cognitiva dos alunos e determinar as relações mais importantes entre eles (Jonassen et al. 1993; Gonzalvo, Bajo & Cañas, 1994; Davis & Yi, 2004; Da Silva et al. 2006; Clariana & Wallace, 2007; Trumppower, Guynn & Goldsmith, 2004).

Uma excelente e acessível revisão sobre este tema e as suas respectivas aplicações em investigação, com abundantes referências, pode ser consultada em Goldstone & Son (2005).

Daremos uma especial atenção à descrição da técnica de Redes Associativas Pathfinder pois foi aquela que, pela sua versatilidade, rapidez e simplicidade de utilização, adoptámos no âmbito desta investigação tendo em vista conhecer e representar as estruturas conceptuais dos alunos.

### Redes Associativas Pathfinder

Genericamente, as representações em forma de rede, apresentam os conceitos e as possíveis relações entre eles através de nós de uma estrutura de grafos. A existência ou inexistência de ligações entre os nós (conceitos) e a proximidade entre eles, indica a presença ou ausência de relações, bem como a sua importância relativa.

As Redes Associativas Pathfinder foram desenvolvidas na década de 90 na Universidade de Novo México por Schvaneveldt (1990) e colaboradores com a intenção de encontrar um método mais fiável de representar o conhecimento humano. Procedem do campo da Inteligência Artificial e estão baseadas na teoria matemática dos grafos e nos procedimentos de análise de cluster.

As Redes Associativas Pathfinder avaliam relações de proximidade entre conceitos e identificam as mais significativas com base num algoritmo matemático que, por sua vez, se serve de uma matriz de dados obtida por consulta ao sujeito ou sujeitos em estudo. Permitem criar representações em forma de redes da estrutura cognitiva de um sujeito a partir de dados empíricos e podem ser geradas de forma totalmente automática. Deste modo, evitam os inconvenientes de subjectividade e influência externa que outras representações têm, como os mapas de conceitos. (Casas & Luengo, 1999)

As Redes Associativas Pathfinder têm sido aplicadas a uma ampla variedade de domínios de investigação. Os principais domínios por nós identificados foram os seguintes: Aplicações em investigação básica; Aplicações ao desenvolvimento pessoal e profissional; Aplicações ao desenho e avaliação de recursos educativos digitais; Aplicações sobre recuperação e organização de informação; Aplicações a temas relacionados com o currículo e o processo de ensino e aprendizagem. (Jonassen et al., 1993; Gonzalvo, Cañas & Bajo, 1994; Chen, 1999; Ramey, 2001; Moya-Anegón et. al., 2004; DiCerbo, 2007; Clariana, Wallace & Godshalk, 2009; Lau & Yuen, 2010).

O programa de computador que habitualmente é utilizado para gerar estas redes é o KNOT (Knowledge Network Organizing Tool) da Interlink (1989), que possui versões para computadores Apple Macintosh e IBM PC. A nova versão para computadores IBM PC compatíveis, denominada PATHFINDER (ainda em versão beta), que amavelmente nos foi disponibilizada por Roger Schvaneveldt, foi a utilizada neste estudo por a considerarmos bastante estável e fiável. Numa investigação actualmente em curso (Godinho, Luengo & Casas, 2007), está em desenvolvimento um programa - Micro GOLUCA - para PC compatíveis que também permite obter e representar estas redes.

Para criar e organizar as redes o programa PATHFINDER emprega dois algoritmos. Um deles determina os vínculos que formam a rede e o outro proporciona as coordenadas dos nós. O programa permite ainda calcular outras características importantes das redes tais como a sua coerência interna e a sua similaridade.

A medida de coerência (coeficiente de coerência, que flutua entre -1 e +1) espelha a consistência interna da organização de uma rede conceptual e, por isso, permite apreciar o grau de experiência que um sujeito possui acerca de um tema e, inclusivamente, se o sujeito respondeu com seriedade ou à sorte. De acordo com Casas e Luengo ambos os factores (atenção e conhecimento do tema) permitem avaliar a evolução do processo de construção e aquisição dos conceitos (Casas & Luengo, 1999). O coeficiente de coerência é calculado através da correlação entre o total de associações entre os nós da rede. “A forma de comparar o tipo de relações entre dois conceitos, por exemplo a e b, é calculando a correlação entre as forças da relação que existe entre a e todos os demais conceitos do conjunto (menos ele mesmo e b) e as forças da relação de b e todos os outros conceitos (menos ele mesmo e a). Se este procedimento se aplica a todos os conceitos, obtém-se uma medida indirecta que se correlaciona de novo com os dados originais de proximidade.” (Casas, 2002, p. 174)

A medida de similaridade (coeficiente de similaridade, que atribui um valor entre 0 e 1) avalia o número de ligações em comum entre duas redes em relação com o número de ligações totais. “Duas redes idênticas proporcionarão uma similaridade igual a 1 e duas redes que não partilhem ligações proporcionarão uma similaridade de 0” (Casas, 2002, p. 175). O coeficiente de similaridade assim obtido permite, entre outras possibilidades (combinadas ou não com os valores de coerência), efectuar estudos comparativos de redes de alunos, analisar a evolução das redes ao longo de um determinado intervalo de tempo, ou comparar os esquemas conceptuais dos alunos com os dos professores, entre outras possíveis comparações de redes. (Casas e Luengo, 1999)

## METODOLOGIA

O objectivo deste estudo consistiu em estudar de que forma os alunos associam os conceitos relacionados com as operações de multiplicação e divisão de modo a identificar as relações mais significativas entre eles assim como reconhecer se houve alterações significativas da estrutura conceptual dos alunos (no que concerne à multiplicação e à divisão) após a realização de uma experiência educativa com recurso ao PmatE.

## Desenho

O objectivo de contribuir para o conhecimento e compreensão da rede conceptual dos alunos no que diz respeito às operações de multiplicação e divisão, através do uso sistemático da plataforma PmatE, implicou um desenho construído à medida dos objectivos da investigação, combinando um conjunto de métodos e técnicas.

O procedimento inicial consistiu na análise de conteúdo com vista à selecção dos conceitos relacionados com a multiplicação e a divisão. A análise de conteúdo incidiu sobre manuais escolares e outros livros de didáctica da matemática.

Antes e depois da utilização do ambiente PmatE os alunos participantes foram sujeitos à avaliação dos conceitos matemáticos através da técnica proposta por Schvaneveldt (1990) que gera matrizes de dados correspondentes à rede conceptual dos alunos relativa às operações em estudo. Estas matrizes de dados foram analisadas a diferentes níveis recorrendo aos programas PATHFINDER e SPSS. No final da experiência, os alunos foram ainda sujeitos à aplicação de um teste diagnóstico de matemática (Prova PmatE) envolvendo exercícios e problemas acerca do tema em estudo. Esta prova escrita foi elaborada pela equipa de investigação com base nos modelos geradores de problemas matemáticos do ambiente PmatE.

No âmbito da proposta educativa centrada na exploração do PmatE, o professor da turma envolvida proporcionou a utilização de um variado conjunto de actividades baseadas na WEB (exercícios e situações problemáticas) com os alunos. As actividades PmatE (modelos PmatE<sup>2</sup>), semelhantes à mostrada na seguinte figura, foram seleccionadas, organizadas e propostas pelo professor de acordo os objectivos e os conteúdos curriculares. No essencial, as actividades assumiram a função de prática/treino, revisão de conceitos e diagnóstico de conhecimentos. A

<sup>2</sup> Um modelo PmatE é composto por um enunciado inicial - um texto (ou imagens / gráficos estáticos ou dinâmicos) - e por quatro questões ou preferências de resposta (texto ou porções de texto, ou imagens / gráficos estáticos ou dinâmicos), escolhidas aleatoriamente com base em parâmetros de domínio variável (números, expressões, sinais, etc.), às quais são atribuídos valores lógicos (Verdadeiro ou Falso) consoantes os parâmetros gerados.

experiência educativa deu aos alunos a oportunidade de realizarem actividades de matemática construídas em PmatE sobre as operações aritméticas.

Na Escola, os alunos utilizaram o ambiente PmatE pelo menos uma vez por semana, de Janeiro a Maio. As actividades PmatE eram realizadas pelos alunos em grupos de dois, na sala de informática da Escola que possui um conjunto de 12 computadores com ligação à Internet.

FIGURA 1. Modelo gerador de problemas matemáticos no ambiente PmatE

Numa pastelaria, o preço total de um bolo é 9,04 €. O bolo foi cortado em 8 fatias iguais e já se venderam as que faltam na figura. Então,



com as fatias já vendidas do bolo, a pastelaria recebeu $5 \times 1,13$ €.	<input type="radio"/> V <input type="radio"/> F
se alguém comprar todas as fatias que sobraram pagará 3,39 €.	<input type="radio"/> V <input type="radio"/> F
cada fatia do bolo custa 3 €.	<input type="radio"/> V <input type="radio"/> F
6 fatias do bolo custam 6,78 €.	<input type="radio"/> V <input type="radio"/> F

## Participantes

Participaram neste estudo 23 alunos do 4º ano de escolaridade do 1º Ciclo do Ensino Básico, assim como o professor titular da turma. O professor, que aceitou voluntariamente participar neste estudo com a sua turma, estava a frequentar um Estágio de formação de 25 horas presenciais

subordinado ao tema: A Didáctica da Matemática e TIC: Resolução de problemas no 1º Ciclo do Ensino Básico. (Registo de acreditação: CCPFC/ACC-42200/05)

### **Instrumentos**

Para além das Redes Associativas Pathfinder criadas a partir do programa PATHFINDER e do programa de análise estatística de dados SPSS, os instrumentos utilizados nesta investigação foram os seguintes:

### **Conceitos seleccionados para a determinação da rede conceptual**

As definições que utilizámos no contexto deste trabalho aproximam-se das noções de conceito especificadas por Tall e Vinner (1981), conhecidas por “conceito definição” e “conceito imagem”. O conceito imagem é algo não verbal associado na nossa mente ao nome do conceito. Ele pode ser uma representação visual do conceito ou uma colecção de impressões e experiências. Estas representações podem ser traduzidas por formas verbais. Por conceito definição entende-se a definição verbal que explica o conceito de modo exacto e de uma forma não circular. (Tall & Vinner, 1981; Domingos, 2001)

O processo de selecção de conceitos relacionados com as operações básicas passou por diversas etapas. Primeiramente, foi realizada uma análise de conteúdo aos manuais escolares e cadernos de exercícios de Matemática utilizados nos 3º e 4º anos de escolaridade. Com esta análise foi possível inventariar os conceitos associados às operações aritméticas mais frequentemente citados nos manuais sob observação. Os critérios utilizados para seleccionar os conceitos mais significativos foram os seguintes: a) *conceitos em destaque* (negrito, sublinhado, com cores...) nos textos; b) *conceitos repetidos* com maior frequência ao longo do manual escolar; c) *conceitos apresentados com maior* frequência em definições, exemplos, exercícios e problemas. Para além dos manuais referidos foram ainda analisados livros de didáctica da matemática e outra bibliografia científica respeitante a este tema.

Do mesmo dispositivo de selecção de conceitos fez parte ainda a administração de um questionário a um grupo de 22 professores de vários níveis de ensino, com vista a identificar os conceitos mais comumente usados (durante a sua prática lectiva e/ou na preparação de materiais didácticos), pelos alunos (p.e., quando se lhes pede para inventar um problema, uma pergunta, ou formular uma resposta) e nos enunciados dos exercícios e das situações problemáticas constantes dos manuais escolares e/ou outros recursos como cadernos de actividades. Finalmente, após a distribuição dos conceitos por categorias, foram seleccionados os conceitos a utilizar.

Em relação à multiplicação e à divisão, os conceitos seleccionados para utilizar com a aplicação web CN\_MeBa e com o programa PATHFINDER foram os seguintes: Distribuir, Repartir, Subtracção sucessiva, Múltiplo, Duplicar / Triplicar..., Adição sucessiva, Quociente, Dividir, Produto, Multiplicar.

### **CN\_MeBa**

Como a ferramenta de obtenção de dados do programa PATHFINDER, apresenta algumas limitações, nomeadamente uma interface pouco amigável e não permite a recolha de dados online, foi adoptada a aplicação CN\_MeBa produzida no âmbito da investigação de Arias, J. (2008) e que possibilitou a criação das matrizes numéricas que, posteriormente, foram transferidas para o programa PATHFINDER.

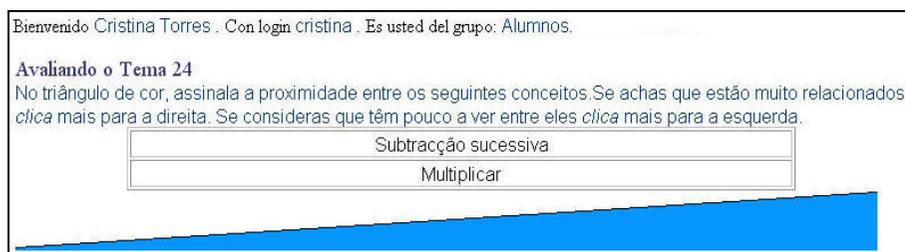
### **Procedimentos**

No início do ano lectivo 2006-2007 e no final (após a realização do trabalho de campo) um dos investigadores deslocou-se à Escola e, utilizando a sala de informática com cerca de 12 computadores, aplicou o teste aos alunos e ao professor que, antecipadamente, foram divididos em grupos.

Genericamente, estes sujeitos, depois de entrarem na aplicação CN-MeBa com um nome e palavra-chave próprios, apenas tinham que pensar nas operações em confronto e nos conceitos que iam sendo apresentados de modo emparelhado e, no triângulo de cor (figura 2), assinalar a proximidade

entre os conceitos. Premiam mais para a direita se consideravam que os conceitos estavam muito relacionados e mais para a esquerda se consideravam que os conceitos mantinham escassa relação entre eles.

**FIGURA 2.** Interface do programa CN\_MeBa



## RESULTADOS

Depois de obtidos os dados procedeu-se à sua transferência e à sua análise através do Programa PATHFINDER e do programa SPSS.

### Análise de coerência das redes

#### Rede a rede:

Obtiveram-se os mapas cognitivos para cada um dos 23 alunos. Destes, apresentamos (a título de exemplo) dois mapas. O primeiro (Figura 3) representa a rede conceptual de um aluno (a2) com um coeficiente de coerência baixo e, o segundo (Figura 4) a rede de um aluno (a3) com um coeficiente de coerência alto.

Analisando em pormenor a Figura 3, que corresponde à rede de menor coerência (coh= 0.00530), verificamos que os conceitos estão dispostos de uma forma indistinta e sem nexos de causalidade entre eles. Podemos ainda verificar que, por exemplo, “Adição sucessiva”, “Multiplicar” e “Produto” aparecem erradamente na dependência de conceitos como “Dividir”, “Quociente” e “Distribuir”.

Na rede reflectida na figura 4, que equivale à rede de maior coerência (coh= 0.99962), os conceitos relacionados com a divisão aparecem dispostos à esquerda na estrutura da rede e os conceitos relacionados com a multiplicação tendencialmente para a direita. Esta organização da conexão entre os conceitos, mais lógica que a anterior, denota que este aluno possui um conhecimento conceptual mais coeso da estrutura multiplicativa.

Estes dados podem significar que o aluno a2 respondeu aleatoriamente ou com pouco cuidado ao teste proposto no instrumento CN\_MeBa. Contudo, cruzando com os resultados obtidos na Prova PmatE, constatamos e confirmamos que este aluno obteve uma pontuação inferior à do aluno que corresponde à rede de coerência mais alta, o que nos permite inferir que, neste caso, existem de facto diferenças entre eles ao nível do conhecimento nesta área. O aluno a cuja rede corresponde a rede de coerência 0.00530 obteve 40% no teste, equivalente à avaliação de Não Satisfaz, enquanto o aluno que estabeleceu a rede de coerência 0.99962, obteve a classificação de 85%, correspondente à avaliação de Muito Bom.

Em síntese, a figura 3 representa a rede de um aluno com pouco conhecimento conceptual e a figura 4 o mapa de um aluno identificado como tendo um bom conhecimento conceptual da estrutura multiplicativa.

**FIGURA 3.** Rede conceptual do aluno a2

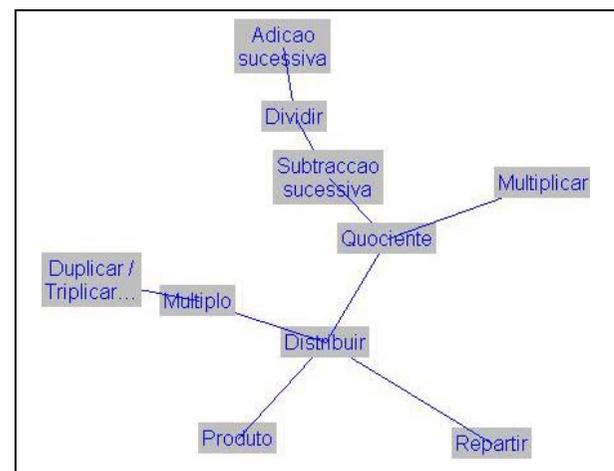


FIGURA 4. Rede conceptual do aluno a3

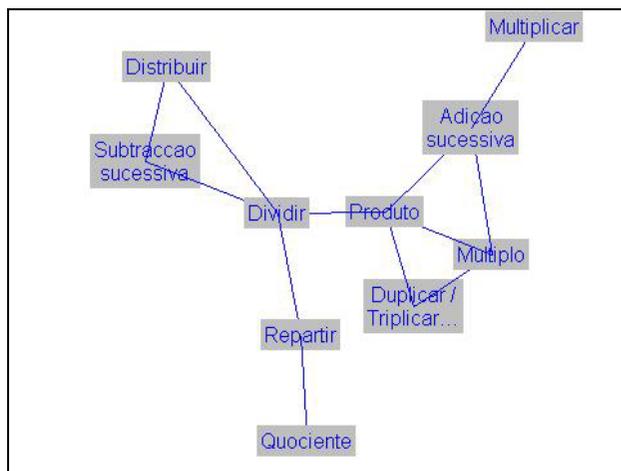


FIGURA 5. Rede conceptual do professor

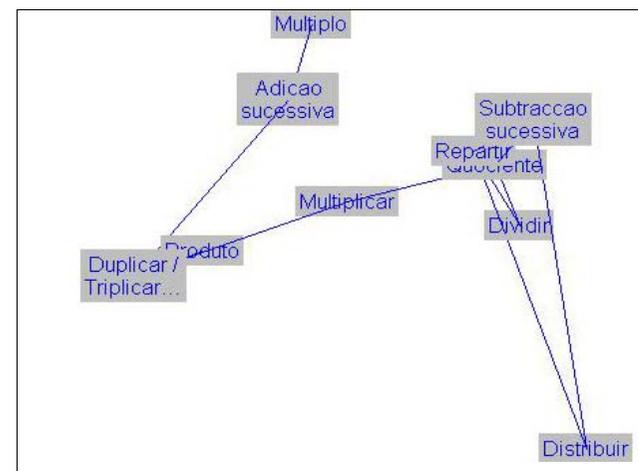


TABELA 2. Coerência das Redes antes e depois da intervenção educativa

Aluno	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13
Pre-Coh	0,65	0,39	0,99	0,63	-0,06	0,78	-0,02	-0,29	0,84	0,26	0,71	0,22	0,24
Pos-Coh	0,79	0,01	0,99	0,74	0,46	0,76	0,09	0,63	0,95	0,28	0,93	0,66	0,99
Aluno	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a21	a22	a23	a24	Med	Prof	
Pre-Coh	0,88	-0,14	0,27	0,12	0,44	0,12	0,59	0,60	0,66	-0,16	0,81		
Pos-Coh	0,99	0,63	0,83	0,46	0,81	0,40	0,99	0,34	0,50	0,01	0,92		0,99

Fazendo uma observação directa e sem grande minúcia dos valores constantes da tabela 2, podemos verificar que praticamente todos os alunos aumentaram o seu coeficiente de coerência do preteste para o posteste, à excepção dos alunos designados por a2, a22 e a23. Tendo em consideração o valor da coerência média (coluna Media), calculado através do programa PATHFINDER antes e depois da realização da experiência, apuramos que os alunos aumentaram em 0,118 pontos o seu coeficiente de coerência (valores compreendidos entre -1 e +1), aproximando-se bastante do valor obtido pelo professor da turma, com a coerência de 0,999 e cuja rede conceptual está representada na figura 5.

TABELA 3. Comparação de médias através do teste t-student

Paired Samples Statistics							
		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean		
Pair 1	Co-Pre	,38223	23	,370871	,077332		
	Co-Pos	,62377	23	,319974	,066719		
Paired Samples Correlations (Spearman rho)							
		N	Correlation	Sig.			
Pair 1	Co-Pre & Co-Pos	23	,605	,002			
Paired Samples Test							
Paired Differences (Co-Pos - Co-Pre)							
Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference		t	df	Sig.(2-tailed)
			Lower	Upper			
,241	,327	,068	,099	,383	3,533	22	,002

Efectuando uma análise descritiva, baseados nos resultados estatísticos da tabela 3 obtidos através do programa SPSS, verificamos que a coerência média no teste realizado antes de iniciada a experiência foi de 0,382 pontos, subindo para 0,623 pontos após a realização da experiência. Desta forma, há uma diferença de 0,241 pontos entre os dois testes.

O *output* intermédio diz-nos que a correlação (obtida através do coeficiente Spearman) entre os resultados antes e depois da experiência tem o valor de 0,605. Este coeficiente de correlação alto, tendencialmente mais próximo de 1, em conjunto com um nível crítico menor que o nível de significância estabelecido (0,05), indica que as duas variáveis estão linear e significativamente relacionadas.

Para determinar a relação entre as duas variáveis empregamos um teste de comparação de médias. O valor do teste t-student é 3,533 com 22 graus de liberdade. A significância é de 0,002 de onde se pode conjecturar (com a cautela que este tipo de estudo implica) que a experiência de trabalho com PmatE pode ter concorrido, a par de outros factores como o natural e progressivo amadurecimento dos alunos ou a aprendizagem por outros meios, para influenciar a alteração dos níveis de coerência da rede associativa dos conceitos em estudo na estrutura cognitiva dos alunos.

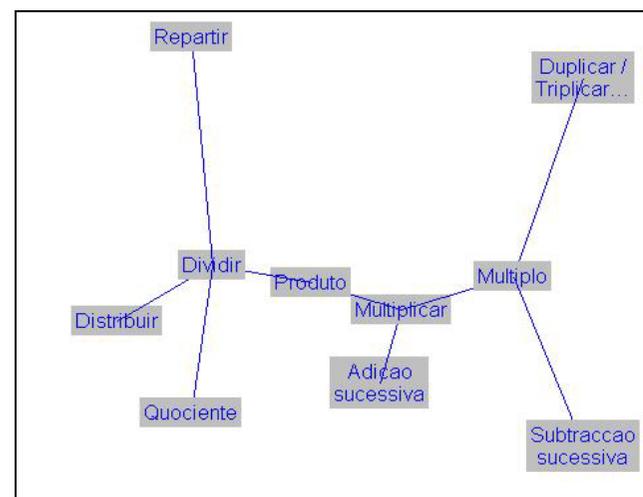
É ainda de destacar um intervalo de confiança a 95% para a diferença entre as médias, cujo limite inferior é -0,383 e o limite superior -0,099. Isto significa que a coerência média depois da experiência é superior à coerência média antes da experiência entre 0,099 e 0,383 aproximadamente, a um nível de confiança de 95%. Por outras palavras, para o nível de confiança indicado, a experiência pode ter ampliado a coerência entre 0,099 e 0,383 pontos aproximadamente (para valores globais compreendidos entre -1 e +1).

### Rede média

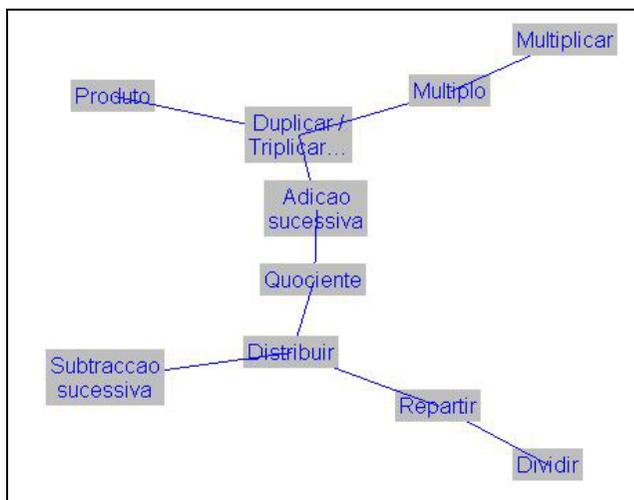
Através da função “Average”, o programa PATHFINDER permite ainda, assente num índice de nós múltiplos, gerar a rede média associativa dos conceitos em estudo na estrutura cognitiva de um conjunto de alunos. As redes médias são calculadas a partir dos valores dos pesos entre os conceitos

de duas ou mais matrizes de similaridade. Como o nome indica, uma rede média resulta da média dos valores de similaridade entre cada par de conceitos, e é obtida a partir dos valores das matrizes de dados de todos os alunos. A matriz resultante (matriz média) tem as mesmas características de uma matriz de similaridade. Estas redes conservam as propriedades comuns a todo o grupo e, em génese, reflectem os conceitos principais e as relações entre conceitos existentes na maioria das redes dos alunos do grupo.

**FIGURA 6.** Rede média dos conceitos desenvolvidos pelos alunos (Antes do início da experiência)



**FIGURA 7.** Rede média dos conceitos desenvolvidos pelos alunos (Depois da experiência concluída)



Através desta “imagem média”, obtida antes do início da experiência com PmatE (figura 6), podemos constatar que os conceitos em maior evidência são os conceitos “Dividir”, “Multiplicar” e “Múltiplo. Os conceitos da rede menos conhecidos ou menos fortes são os que aparecem nas extremidades da rede: “Repartir”, “Duplicar/Triplicar e “Subtracção sucessiva” tendo, contudo, os alunos colocado erradamente este último conceito na dependência do conceito “Múltiplo” e no enfiamento dos conceitos relacionados com a multiplicação. Este facto evidencia a dificuldade que os alunos ainda sentiam, antes da intervenção educativa, ao diferenciar conceptualmente os termos relacionados com a multiplicação e a divisão.

Na figura 7, que reflecte a rede média da mesma turma obtida após a realização da experiência, os conceitos nucleares são agora os de “Distribuir” e de “Duplicar / Triplicar, já que aparecem representados como nós múltiplos da rede. O aparecimento destes conceitos, menos comuns, como conceitos atómicos, em conjugação com o facto do conceito

“Subtracção sucessiva” se encontrar agora, correctamente, na linha dos conceitos relacionados com a divisão, denota que estamos perante uma turma de alunos com, possivelmente, uma estrutura conceptual mais consistente. (Casas & Luengo, 2005)

#### Análise da similaridade das redes

A similaridade entre redes calcula-se a partir da comparação das ligações existentes entre ambas as redes. A similaridade corresponde ao número de ligações em comum dividido pelo número de ligações das duas redes. Esta medida oscila entre 0 e 1, em que 0 significa que não existem ligações comuns e 1 significa que as redes são idênticas. O valor 1 é considerado teórico pois é muito difícil que surjam duas redes análogas.

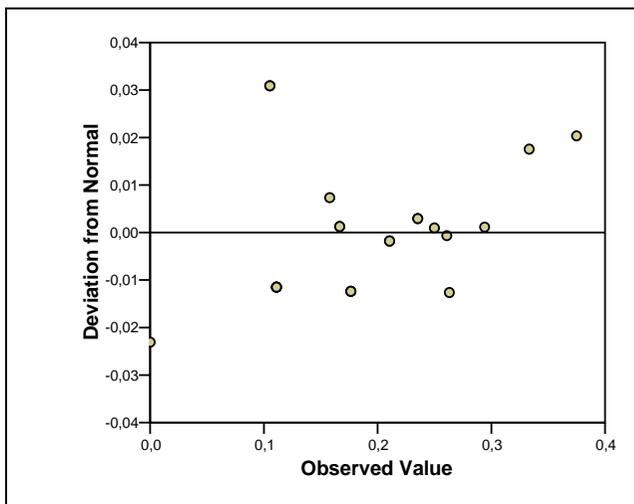
Aproveitando a funcionalidade “Compare Networks” do programa PATHFINDER calculamos a similaridade de cada uma das redes dos alunos antes e depois da intervenção educativa, comparativamente com a rede do professor (Tabela 4).

**TABELA 4.** Comparação da similaridade da rede dos conceitos desenvolvidos pelos alunos em relação com a rede do professor, antes e depois da intervenção educativa

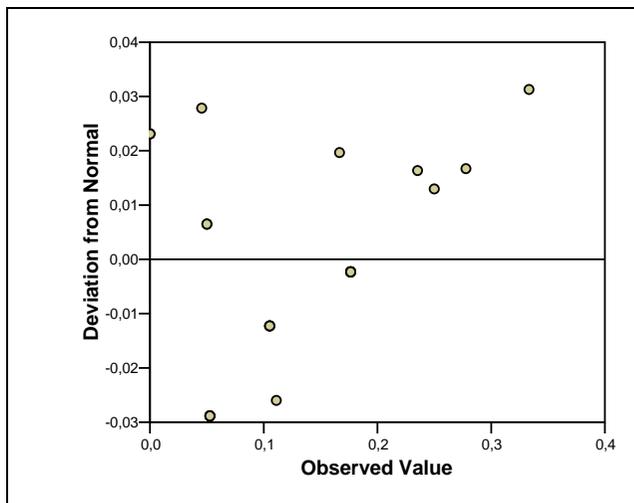
Aluno	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
Pre-Sim	0,21	0,18	0,21	0,38	0,16	0,17	0,17	0,11	0,26	0,26	0,24	0,24
Pos-Sim	0,05	0,18	0,00	0,25	0,11	0,05	0,17	0,05	0,11	0,05	0,11	0,24
Aluno	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a21	a22	a23	a24	
Pre-Sim	0,11	0,29	0,00	0,18	0,11	0,25	0,11	0,18	0,33	0,11	0,11	
Pos-Sim	0,18	0,11	0,18	0,05	0,33	0,18	0,05	0,05	0,18	0,28	0,00	

Com base numa simples consulta à Tabela 4 podemos averiguar que, apesar de vários alunos se terem conseguido aproximar da rede do professor (rede que, de algum modo, espelha o conhecimento científico neste domínio, ou melhor, o conhecimento que o professor ambiciona que os alunos prossigam), foram mais os alunos que se afastaram desta rede de referência, apesar de alguns terem expressivamente encurtado as distâncias. De modo a aprofundar a análise destes dados decidimos recorrer à elaboração de gráficos Q-Q Plot normais (figuras 8 e 9).

**FIGURA 8.** Distribuição dos valores de similaridade obtidos antes do início da experiência



**FIGURA 9.** Distribuição dos valores de similaridade obtidos depois da experiência concluída



Comparando os dois gráficos podemos conferir o que anteriormente acabamos de mencionar. Após a realização da experiência com PmatE houve dois padrões de tendência que levaram a uma bipolarização dos alunos. Por um lado, uma inclinação que correspondeu a um afastamento contrário à similaridade da rede do professor e, por outro, uma tendência que correspondeu a uma separação do valor zero (redes sem qualquer tipo de similaridade) no sentido de uma *avizinhamento* da rede do professor.

Respondendo directamente às questões de investigação inicialmente colocadas, podemos indicar que:

- 1- Verificou-se uma diferença significativa dos níveis de coerência da rede associativa dos conceitos em estudo na estrutura cognitiva dos alunos.
- 2- A rede associativa de conceitos dos alunos não se aproximou significativamente da rede associativa do professor relativa aos mesmos conceitos.

## CONCLUSÕES

Apesar de se tratar de um estudo envolvendo um número reduzido de alunos, podemos interpretar estes resultados no sentido de conjecturar que as redes de menor coerência ou mesmo de coerência negativa estão associadas a alunos com menor conhecimento sobre a estrutura conceptual multiplicativa, enquanto as redes de coerência mais alta e que melhor se aproximam da rede do professor (na prática, o especialista no domínio em estudo) coincidem com a de alunos com um maior nível de conhecimento no referido domínio. Estes resultados são convergentes com os resultados obtidos por Casas & Luengo (Casas, 2002; Casas & Luengo, 2005).

As conclusões do estudo, embora com algumas reservas, mostram que a experiência de trabalho com o ambiente PmatE a que os alunos estiveram expostos, pode ter contribuído (pelo menos no que diz respeito aos valores de coerência) para influenciar a diferença de valores entre a avaliação inicial e a avaliação final, ou seja, o conhecimento dos alunos no que diz respeito às operações da multiplicação e divisão.

No que diz respeito à similaridade das redes dos alunos em comparação com a rede do professor, a análise efectuada indica que a variação entre os resultados obtidos antes e depois da experiência com PmatE não foi significativa.

O desenho de investigação adoptado e o escasso número de alunos envolvidos não permitem qualquer generalização dos resultados obtidos.

Ainda assim os resultados constituem um contributo e um estímulo ao aprofundamento da investigação relativa às representações mentais que os alunos fazem dos conceitos matemáticos. Um maior número de alunos e um plano de investigação mais abrangente poderão criar as condições para analisar os efeitos da utilização do ambiente PmatE na estrutura conceptual dos alunos no que concerne às operações matemáticas, neste caso de multiplicação e divisão.

A técnica de Redes Associativas Pathfinder, integrada neste tipo de estudos, apresenta potencialidades para o estudo do conhecimento conceptual dos alunos. Usadas de modo adequado, esta técnica constitui um método simples, rápido e eficaz que os investigadores e os professores têm à sua disposição para identificar os conceitos nucleares em torno dos quais os alunos estruturam o seu conhecimento e para explorar e conhecer a evolução das redes de conhecimento dos alunos quando se encontram em situações de ensino e aprendizagem.

Uma forma interessante de iniciar este processo de aprendizagem por parte dos professores é comparar as redes próprias ou as redes de colegas e especialistas (outros professores do 1º Ciclo, professores de matemática de outros anos ou níveis de ensino, professores de didáctica da matemática, ...) com os esquemas dos alunos e, inclusivamente, com a estrutura dos conceitos que aparecem num manual escolar ou num recurso educativo em formato digital. Este trabalho pode ser efectuado em comparação com a avaliação das actividades (resolução de exercícios e problemas) realizadas pelos alunos. Como base na informação que recolhe por este processo, naturalmente em paralelo com outros meios de diagnóstico e avaliação, o professor dispõe de mais uma alternativa para averiguar os conhecimentos prévios, intercalares e finais que os alunos desenvolvem ao longo do processo educativo e, em funções dos resultados, decidir planificar situações

de aprendizagem ou utilizar recursos de apoio que ajudem a reforçar ou consolidar as aprendizagens.

#### AGRADECIMENTOS

Para a realização deste estudo agradecemos a colaboração dos alunos e professores de uma turma do 4º ano de escolaridade da Escola Salesiana (Évora). São também devidos agradecimentos ao Projecto Matemática e Ensino da Universidade de Aveiro nas pessoas dos Professores Batel Anjo, Paula Oliveira e Alexandra Bernardo, assim como ao Professor Juan Arias da Universidade de Extremadura (Centro Universitário de Mérida) que criou e adaptou a aplicação CN\_MeBa.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ausubel, D. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View*. New York: Rinehart and Winston.
- Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1983). *Psicologia Educativa - um punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
- Arias, J. (2008). *Evaluación de la calidad de Cursos Virtuales: Indicadores de Calidad y construcción de un cuestionario de medida. Aplicación al ámbito de asignaturas de Ingeniería Telemática* (tese de doutoramento). Mérida: Universidade de Extremadura.
- Bower, G., Lesgold, A., & Tieman, D. (1969). Grouping operations in free recall. In *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, nº 8, 481-493.
- Carvalho, J. L., Luengo, R., Ramos, J. L., & Casas, L. (2007). Problemas de matemáticas on-line (3º y 4º de Educación Primaria). In *Actas XIII JAEM*. Granada: Universidade de Granada.
- Casas, L. (2002). *El estudio de la estructura cognitiva de alumnos a través de Redes Asociativas Pathfinder. Aplicaciones y posibilidades en Geometría* (tese de doutoramento). Badajoz: Universidad de Extremadura.

- Casas, L., Luengo, R. (1999). La exploración de la estructura conceptual en los alumnos. Un método empírico: Las Redes Asociativas Pathfinder. In *Campo Abierto*, nº 16, pp. 11-34.
- Casas, L., Luengo, R. (2004). Representación del conocimiento y aprendizaje: Teoría de los Conceptos Nucleares. In *Revista Española de Pedagogía*, nº 227 (vol. 62), pp. 59-84.
- Casas, L., & Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. In *Enseñanza de las Ciencias*, nº 23( vol. 2), pp. 201-216.
- Clariana, R., Wallace, P., & Godshalk, V. (2009). Deriving and Measuring Group Knowledge Structure from Essays: The Effects of Anaphoric Reference. In *Educational Technology Research and Development*, nº 6 (vol. 57), pp. 725-737.
- Chen, Ch. (1999). *Information Visualisation and Virtual Environments*. London: Springer Verlag.
- Da Silva, C., Mellado, V., Ruiz, C., & Porlán, R. (2006). Evolution of the conceptions of a secondary education biology teacher: Longitudinal analysis using cognitive maps. In *Science Teacher Education*. Wiley Periodicals, Inc, nº3 (vol. 91), pp. 461 - 491.
- Davis, F., Yi, M. (2004). Improving computer skill training: Behaviour modelling, symbolic mental rehearsal, and the role of knowledge structures. In *Journal of Applied Psychology*, nº 89 ( vol. 3), pp. 509-523.
- Dicerbo, K. (2007). Knowledge Structures of Entering Computer Networking Students and Their Instructors. In *Journal of Information Technology Education*, nº 6 (vol. 6), pp. 263-277.
- Domingos, A. (2001). Diferentes abordagens na construção dos conceitos matemáticos. In *Actas do XII Seminário de Investigaçao em Educaçao Matemática* (pp. 161-173). Vila Real.
- Fenker, R. (1975). The organization of conceptual materials: A methodology for measuring ideal and actual cognitive structures. In *Instructional Science*, nº 4 (vol. 33), pp.57-72.
- Fox, D. J. (1987). *El proceso de investigación en educación*. Pamplona: Ediciones Universidad de Navarra (EUNSA).
- Gilar, R. (2003). *Adquisición de habilidades cognitivas. Factores en el desarrollo inicial de la competencia experta* (tese de doutoramento). Alicante: Universidad de Alicante.
- Godinho, V., Luengo, R., & Casas, L. (2007). *Implementación del software GOLUCA y aplicación al cambio de redes conceptuales* (diploma de estudos avançados). Badajoz: Universidad de Extremadura.
- Goldstone, R., & Son, J. (2005). Similarity. In K. Holyoak & R. Morrison (Eds.). *Cambridge Handbook of Thinking and Reasoning* (pp. 13-36). Cambridge: Cambridge University Press.
- Gonzalvo, P., Cañas, J., & Bajo, M. (1994). Structural representations in knowledge acquisition. In *Journal of Educational Psychology*, nº 86, pp. 601-616.
- Jonassen, D. (1987). Verifying a method for assessing cognitive structure using pattern notes. In *Journal of Research and Development in Education*, nº 20 (vol. 3), pp. 1-14.
- Jonassen, H., Beissner, K., & Yacci, M. (1993). Structural knowledge: techniques for representing, conveying, and acquiring structural knowledge. New Jersey and London: Lawrance Erlbaum Associates.
- Lau, W., & Yuen, A. (2010). Promoting Conceptual Change of Learning Sorting Algorithm through the Diagnosis of Mental Models: The Effects of Gender and Learning Styles. In *Computers & Education*, nº1 (vol. 54), pp. 275-288.
- Moya-Anegón, F., Vargas-Quesada, B., Herrero-Solana, V., Chinchilla-Rodríguez, Z., Corea-Álvarez, E., & Muñoz-Fernández, F. (2004). A new technique for building maps of large scientific domains based on the co-citation of classes and categories. *Scientometrics*, nº 61(vol. 1), pp. 129-145.
- Norman, D. (1976). Comments on learning schemata and memory representation. In C. Klahr (ed.). *Cognition and instruction*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

- Novak, J., & Gowin, D. (1984). *Learning how to learn*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Preece, P. (1976). Mapping cognitive structure: A comparison of methods. In *Journal of Educational Psychology*, nº 68, pp. 1-8.
- Ramey, J. (2001). Assessment of Training Using Pathfinder Associative Networks. In *Annual Meeting of the Southwest Educational Research Association* (24th), New Orleans: LA.
- Schvaneveldt, R.W. (ed.) (1990). *Pathfinder Associative Networks. Studies en Knowledge Organization*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.
- Shavelson, R. (1972). Some aspects of the correspondence between content structure and cognitive structure in physics instruction. In *Journal of Educational Psychology*, nº 63, pp. 225-234.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In *Educational Studies in Mathematics*, nº 12, pp. 151-169.
- Thro, M. (1978). Individual differences among college students in cognitive structure and physics performance. In *Annual meeting of the American Educational Research Associatio*. Toronto: Canada.
- Trumpower, D., Guynn, M., & Goldsmith, T. (2004). Goal specificity and knowledge acquisition in statistics problem solving: Evidence for attentional focus. In *Memory & Cognition*, nº 32 (vol. 8), pp. 1379–1388.
- Tulving, E. (1967). The effects of presentation and recall of materials in free-recall learning. In *Journal of verbal learning and verbal behaviour*, nº 6, pp. 175-184.
- Wainer, H., & Kaye, K. (1974). Multidimensional scaling of concept learning in an introductory course. In *Journal of Educational Psychology*, nº 66, pp. 591-598.
- .

**Abstract:** This paper describes a learning experience, which took place in a 4th grade Portuguese classroom and involved an educational intervention using a mathematical learning platform, named PmatE.

The study aims at contributing for a better understanding of the student's conceptual networks while learning two mathematical operations: division and multiplication.

Before and after the use of the PmatE platform, participating students were subject to an evaluation of their mathematical concepts using a technique proposed by Schvaneveldt (1990) "PathFinder Associative Networks", which generates arrays of data corresponding to the students' conceptual network. These data matrices were then analyzed at different levels using the SPSS software.

The CN\_MeBa and the PATHFINDER software were used as tools for capturing students' knowledge representation while solving mathematical problems by using the PmatE environment systematically.

Results suggest differences in student's mental representations of mathematical concepts related with division and multiplication operations in the beginning and at the end of the educational intervention. Regarding the similarity of students' networks compared with the teacher's networks, the analysis indicates that the differences between the results obtained before and after the intervention with PmatE were not significant.

Conclusions and limitations of the study are discussed. The results suggests that this approach can be an useful method to understand students' mathematical conceptual knowledge during the learning processes and help teachers' to better analyze and observe students' progress.

**Keywords:** Artificial Intelligence, knowledge representation, cognitive structure, semantic networks, Pathfinder Associative Network.

**Texto:**

- Submetido: Fevereiro, 2010.
- Aprovado: Março, 2010.

**Para citar este artigo:**

Carvalho, J. L., Ramos, J. L., Casas, L., & Luengo, R. (2010). Estrutura cognitiva dos alunos e aprendizagem conceptual da Matemática: contributos para o seu conhecimento através da técnica de Redes Associativas Pathfinder. *Educação, Formação & Tecnologias*, 3(1), 15-30. [Online], disponível a partir de <http://eft.educom.pt>.