GEOMETRIA SEM MEDIDAS?

Maria Manuela M. S. DAVID [1]

Ilust. do livro: O Cientista - Ed. José Olympio

INTRODUÇÃO

Depois de alguns anos em que a Geometria foi relegada para um segundo plano no ensino da Matemática de 1º e 2º graus, hoje em dia nota-se uma preocupação crescente com o seu ensino, principalmente na área acadêmica, dada a sua reconhecida importância, nomeadamente para desenvolver certo tipo de intuição matemática – veja-se, por exemplo, MESERVE (1973). Podemos constatar isso através da porcentagem razoável de artigos sobre o ensino da Geometria que aparecem hoje nas revistas da área da Educação Matemática, tanto nas nacionais quanto nas estrangeiras. Certamente que essa preocupação se irá refletir nos currículos, bem como na atuação dos professores de 1º e 2º graus, durante os próximos anos.

---

1. Professora do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino (FAE/UFMG).

A literatura disponível deixa, no entanto, margem para diversos questionamentos, em particular no que diz respeito a qual abordagem se deverá adotar para o ensino da Geometria. Devemos tentar uma abordagem via transformações geométricas, ou uma via mais tradicional, na forma de uma geometria que estuda as propriedades das figuras primeiro, logo seguida da uma abordagem axiomática? Devemos ensinar primeiro geometrias não-métricas e só depois a geometria euclidiana, ou devemos começar por ensinar de imediato a geometria euclidiana?

No início deste século, Félix KLEIN (1931) fez a apologia da construção das diferentes geometrias por consideração dos invariantes para determinados grupos de transformações. Sua proposta metodológica foi absorvida, anos mais tarde, por diversos currículos e livros didáticos para o 1º e 2º graus, sob a influência do chamado Movimento da Matemática Moderna; a título de exemplo, veja-se PAPY (1967a e 1967b) e DIENES (1971). A tendência evidenciada por aqueles autores que propõem essa abordagem ao ensino da Geometria no 1º e 2º graus é no sentido de sugerir que primeiro se trabalhe com as geometrias não-métricas (isto é, com conceitos geométricos que não dependem da noção de medida), e só depois com a noção de medida e a geometria euclidiana. Para reforçar essa tendência, contribuiu subtancialmente, sem dúvida, o trabalho de PIAGET (1973 e 1977).

DIENES e GOLDING (1971) escrevem: "Achamos que as crianças devem estudar, de início, transformações mais gerais, que não conservam as distâncias, nem os ângulos. Só depois disso lhes apresentaremos, em pormenores, as isometrias" (p.4). É assim que eles propõem que o ensino da Geometria acompanhe o desenvolvimento psicológico da criança que, de acordo com as observações feitas por PIAGET (1977), vai no seguinte sentido: primeiro surgem certas noções topológicas elementares, depois algumas noções projetivas, e só depois destas é que surgem as noções de medida.

Em 1973, em relatório publicado pela Unesco sobre as "Novas Tendências do Ensino da Matemática", e depois de discutir os prós e contras de se introduzir primeiro a geometria afim (não necessariamente munida de uma métrica) e só depois a geometria euclidiana, os relatores do documento concluem que apesar de tudo "existe uma tendência clara para a introdução da Geometria sob um aspecto afim"(p.32). No Brasil, no entanto, essa tendência nunca chegou a evidenciar-se, a não ser pela anexação dos chamados "jogos topológicos", que se mantêm até hoje como atividades isoladas para o pré-escolar e para a 1ª e 2ª séries do 1º grau.

Quanto à abordagem da Geometria via transformações, essa não deixou qualquer tipo de vestígio nos atuais currículos de Matemática no Brasil. Se isso resulta de uma opção consciente, ou não, não saberíamos dizer. Essa abordagem é sem dúvida discutível, porque a par de algumas vantagens por diversas vezes enfatizadas por determinados autores – como CASTELNUOVO (1963) e DIENES (1971) – presta-se também, em contrapartida, a certas tendências menos desejáveis, como a tendência de se transformar numa abordagem muito mais algébrica do que sintética, e a tendência que manifestam os autores de livros didáticos e os professores para confundirem transformação geométrica com livre mobilidade de figuras; veja-se FREUDENTHAL (1971 e 1973).

OBJETIVO FUNDAMENTAL DA PESQUISA

A pesquisa que passo a descrever a seguir propôs-se verificar a validade de um argumento que, se provada, poderia dar fortes indicações a favor da introdução de geometrias não-métricas antes da geometria euclidiana, a nível de 1º grau. O argumento é o seguinte: tendo em vista que algumas pesquisas parecem indicar que a noção de "conservação" das medidas – em particular de comprimento, área e volume – é adquirida "tardiamente, então a introdução de conceitos geométricos que dependem de noções de medida deverá ser adiada até as crianças terem adquirido essas noções.

FUNDAMENTAÇÃO

Com efeito, de acordo com as pesquisa feitas por PIAGET (1977), primeiro as crianças são apenas sensíveis às relações topológicas entre as figuras, depois elas tornam-se sensíveis às relações projetivas, e, por último, elas percebem as relações euclidianas. Assim é que só por volta dos 7 ou 8 anos de idade elas adquirem a conservação da medida de comprimento, simultaneamente com a conservação da medida da área e de "volume interior", para só adquirirem a conservação de "volume ocupado" por volta dos 11 anos; veja-se PIAGET (1973). Antes da aquisição dessas noções de conservação, segundo Piaget, não faz sentido iniciar o estudo da geometria euclidiana porque, para a criança, a medida associada a uma figura depende da sua posição no espaço.

Corroborando os resultados obtidos por Piaget, temos a pesquisa levada a cabo pelo CSMS Mathematics Team HART (1981), com uma amostra de 10.000 crianças inglesas. Essa pesquisa confirma as dificuldades sentidas por uma grande porcentagem das crianças de idades compreendidas entre os 12 e os 14 anos, em testes sobre a compreensão das noções de medida de comprimento, de área e de volume.

Hart relata os resultados obtidos por um teste desenvolvido para fornecer informação sobre vários aspectos básicos relacionados com a medição, particularmente sobre a conservação de medidas. Várias questões desse teste são uma adaptação à forma de "teste de papel e lápis" dos próprios testes de conservação de medidas de Piaget. A conclusão é que aproximadamente 30% das crianças de idades compreendidas entre 12 e 14 anos não estão totalmente convencidas de que o comprimento, a área e o volume dos objetos não se altera por intermédio de um deslocamento. Cerca de 50% das crianças não estão convencidas de que os segmentos que formam um lado e a diagonal de um retângulo têm comprimentos diferentes. E uns 40% das crianças esquecem a importância da unidade utilizada para medir.

HART (1981) afirma que existe uma evidência clara de que as habilidades de medição adquiridas na escola primária (as quatro primeiras séries do 1º grau, no Brasil) precisam ser consideravelmente reforçadas no nível secundário (5ª à 8ª série do 1º grau e 2º grau, no Brasil). No entanto, algumas críticas podem ser feitas ao modo como os referidos testes de conservação são concebidos. O matemático e professor FREUDENTHAL (1983) afirma:

> "Os psicólogos são razoavelmente unânimes acerca da idade média de conservação das várias características, enquanto que as pessoas que têm alguma experiência didática com crianças em geral julgam essas idades absurdamente elevadas". (p.21)

E acrescenta:

> "As grandes porcentagens de não-conservadores nas experiências psicológicas são conseguidas através de uma estratégia especial: Escolhe-se intencionalmente a transformação que se quer verificar se conserva A de tal modo que ela altera outra característica B tão drasticamente que a atenção é desviada para B (por exemplo, uma mudança acentuada do comprimento quando A é o número cardinal ou a massa, ou uma mudança acentuada da posição ou forma, quando A é o comprimento). O que realmente se está a investigar é se o sujeito é capaz de separar nitidamente estas características umas das outras, e com que força ele é capaz de resistir às tentativas de o confundir. Confusão embutida é em geral mais característica de uma abordagem psicológica do que de uma abordagem didática". (p. 21-22)

Tais críticas nos levam a questionar a validade de alguns testes psicológicos; em particular, os testes de conservação.

A PESQUISA

Pareceu-nos então interessante investigar até que ponto algumas questões do teste "Medidas" desenvolvido pelo CSMS Mathematics Team HART (1981) são realmente resistentes às críticas de FREUDENTHAL (1983). Além disso, pretendíamos também fazer uma avaliação do nível das habilidades de medição atingido pelas crianças, no Brasil.

A título de estudo piloto, e depois de traduzir para português aquelas questões do teste "Medidas" que na pesquisa de HART levaram aos resultados mais surpreendentes (pelo seu nível de facilidade ser bem inferior ao esperado por nós), organizamos um seu sub-teste, que foi administrado em oito turmas do Centro Pedagógico da UFMG. Todas essas oito turmas eram turmas de 1º grau: duas turmas de cada uma das seguintes séries: 5ª, 6ª, 7ª e 8ª (idade: 10 a 16 anos). As questões selecionadas para o sub-teste envolviam conservação e medição de comprimentos, áreas e volumes. Os resultados desse estudo piloto quando confrontados com os resultados do teste "Medidas" obtidos na Inglaterra por HART (1981) parecem indicar, no geral, índices de facilidade muito semelhantes para as diferentes questões, e também a mesma escala para a facilidade dessas questões.

Verificou-se ainda que as duas turmas de 5ª série apresentaram muita dificuldade na própria leitura e interpretação das questões do teste, donde se concluiu que ele não é apropriado para crianças tão jovens. Foi então organizado um novo teste, conservando aquelas questões que no estudo piloto tinham originado os índices de dificuldade mais elevados, e incorporando algumas outras questões que não pertenciam ao teste original de Hart, por as considerarmos formas alternativas de avaliar um mesmo aspecto da medição. Ao conceber essas formas alternativas, valemo-nos das críticas de FREUDENTHAL (1983), e procuramos eliminar todas as situações de "confusão embutida" que conseguimos perceber nas questões originais. Por exemplo, duas das questões da versão inglesa do teste são as seguintes:

QUESTÃO 1

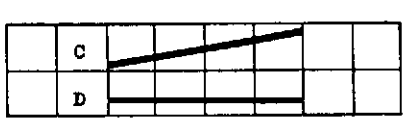
As linhas A, B, C, D, E, F são as linhas mais grossas traçadas no papel quadriculado abaixo.

Para cada par de linhas, marque com uma cruz (X) a resposta que você acha que está certa.

a)

(I) A linha *A* é mais comprida . . . .
(II) A linha *B* é mais comprida . . . .
(III) *A e B* são do mesmo comprimento . . . .
(IV) Você não pode dizer qual é mais comprida . . . .

b)



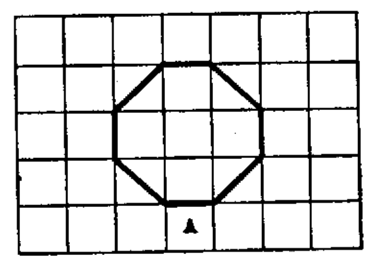
(I) A linha *C* é mais comprida . . . .
(II) A linha *D* é mais comprida . . . .
(III) *C e D* são do mesmo comprimento . . . .
(IV) Você não pode dizer qual é mais comprida . . . .

c)

(I) A linha *E* é mais comprida . . . .
(II) A linha *F* é mais comprida . . . .
(III) *E e F* são do mesmo comprimento . . . .
(IV) Você não pode dizer qual é mais comprida . . . .

QUESTÃO 2

A figura A, de oito lados, está desenhada em papel quadriculado de *1 cm*.



Faça um circulo à volta da resposta certa.
A distância à volta do limite de A é:

8 cm *mais de 8 cm* *menos de 8 cm* *você não pode dizer quanto é*

FONTE: THE CSMS MATHEMATICS TEAM, CHELSEA COLLEGE, LONDRES.

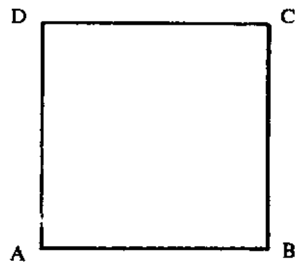
A primeira questão é uma adaptação bastante fiel das experiências utilizadas por PIAGET (1973) para avaliar a conservação de comprimento. Repare-se que, com exceção do primeiro item, o número de quadrículas que cada um dos segmentos cujas medidas estão sendo comparadas "atravessa" é o mesmo. Por outro lado, e também no caso dos itens b e c, os diagramas fazem ressaltar muito claramente o alinhamento (na vertical) das extremidades dos dois segmentos cujos comprimentos estão sendo comparados. É bem possível que a atenção da criança seja desviada para estas características da figura e que isso a leve a dar uma resposta considerada errada. Com efeito, as respostas erradas mais freqüentes, tanto no item b quanto no item c, são que ambos os segmentos têm o mesmo comprimento.

A segunda questão, no nosso entender, é muito semelhante ao item b da primeira questão. A resposta errada mais freqüente é que o perímetro dessa figura é 8 cm. Essa resposta errada pode ser originada, também, por uma característica da figura que fica bem evidenciada no diagrama: cada um dos seus lados "atravessa" uma quadrícula de 1 cm de lado. E, como o número de lados da figura é oito, o seu perímetro viria a ser "8 quadrículas", ou 8 cm. . .

Além dessas duas questões, incluimos no novo teste outras duas que, no nosso entender, são "equivalentes" ao item b da questão 1 e à questão 2, mas chamam mais a atenção da criança para aquilo que realmente estamos querendo que ela compare, isto é, as medidas do lado e de uma diagonal de um retângulo, suprimindo do diagrama o recurso adicional das quadrículas que, embora tenha sido introduzido como um fator facilitador, pode na realidade funcionar antes como um fator complicador.

QUESTÃO 3

O quadrado ABCD representa o tampo de uma mesa.



Imagine que no canto A estavam duas formigas. Uma delas viu um pedacinho de pão em B e encaminhou-se para lá; a outra viu um pedacinho de pão em C, e encaminhou-se também para lá.

a) Na figura acima, com a sua caneta, trace os caminhos percorridos pelas duas formigas.

b) Supondo que as duas andam com a mesma velocidade, qual das duas chega mais depressa ao seu pedacinho de pão: a que foi para

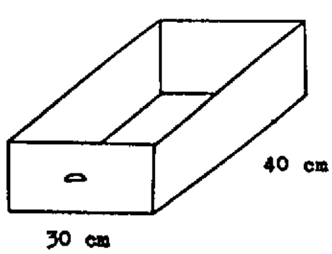
C? Resp.: ____________________

Justifique a sua resposta: ____________________

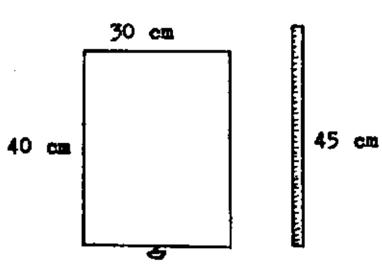
____

____

QUESTÃO 4



Olhando de cima uma gaveta de 30 cm de largura por 40 de fundo, podemos ver o seguinte:



Tem algum jeito de colocar uma régua de 45 cm dentro dessa gaveta?

Resp.:

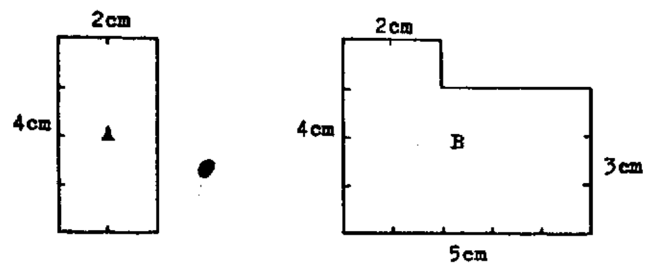
Se você respondeu sim, *mostre no desenho* como a régua deveria ficar.

Alternativas semelhantes tentamos encontrar também para a seguinte questão do teste original:

QUESTÃO 5

a) Quantos quadradinhos como este  seriam necessários para cobrir as figuras A e B?

Escreva a sua *resposta dentro de cada figura.*



b) Se eu utilizasse quadradinhos *menores*, como este, quantos seriam necessários para cobrir cada figura?

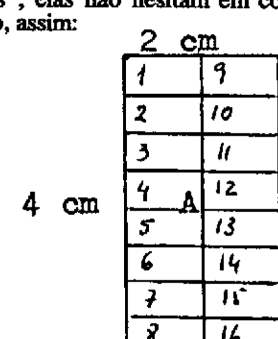
Figura A ....

Figura B ....

FONTE: THE CSMS MATHEMATICS TEAM, CHELSEA COLLEGE, LONDRES.

Trata-se de uma questão que envolve a medição de áreas de figuras planas por iteração de uma unidade de medida. A grande dificuldade desta questão encontra-se no item b, porque além desse aspecto de medição ela envolve, primeiramente, uma comparação das unidades de medida tomadas em cada caso. A resposta errada mais freqüente é a de que o número de "quadradinhos" necessários para cobrir A e B passaria então a ser o dobro do número encontrado no item a.

Em entrevistas feitas com algumas crianças, e posteriormente à administração do teste (durante a fase do estudo piloto), as crianças que deram esse tipo de resposta demonstraram ter feito um raciocínio do seguinte tipo: se o lado do "quadradinho" menor é metade do lado do "quadradinho" maior, então dentro de cada figura deverá caber um número de "quadradinhos" menores que é o dobro do número de "quadradinhos" maiores. Parece então que fica demasiado evidenciada a relação metade/dobro entre as medidas dos lados dos quadrados tomados como unidades de medida, de tal modo que as crianças não chegam sequer a questionar qual é a relação existente entre as respectivas áreas. Mais ainda, quando se insiste com elas e se lhes pede para mostrar na figura (por exemplo, na figura A) como é que ela ficaria coberta por esse tanto de "quadradinhos", elas não hesitam em cobri-la com retângulos; por exemplo, assim:

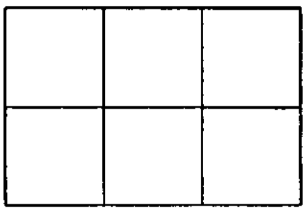


Quer dizer, não ficou claro para a criança que a segunda unidade de medida deverá ser um quadrado também; a única coisa que ficou bem clara é que, de uma unidade para outra, houve alguma coisa que passou à metade. Uma das situações alternativas que encontramos para a questão anterior foi a seguinte:

QUESTÃO 6

Numa loja existem apenas os seguintes *três tipos de azulejos,* todos eles quadrados:

O lado do azulejo desenhado é metade do lado do azulejo branco, e o lado do azulejo preto é metade do lado do azulejo desenhado.
Para cobrir um painel são necessários *6 azulejos brancos,* como mostra a figura:



Então,

a) *Quantos azulejos desenhados (de 10cm X 10cm)* são necessários para cobrir este painel? Resp.:

b) *Quantos azulejos pretos (de 5cm X 5cm)* são necessários para cobrir este painel? Resp.:

Nessa questão tentamos deixar bem claro que as sucessivas unidades de medida consideradas eram todas elas *quadrados,* na forma de azulejos (já por si normalmente quadrados). Além disso, a informação de que a relação entre as medidas dos lados dos sucessivos quadrados era uma relação de metade/dobro não ficou tão evidenciada na Questão 6 como na Questão 5, exatamente para evitar que a atenção da criança ficasse demasiado presa a essa informação.

Incluimos ainda no teste uma sétima questão, que posteriormente fomos obrigados a excluir da nossa análise, porque apresentou uma informação e uma figura que eram contraditórias, e essa contradição só foi percebida depois que o teste já tinha sido administrado em algumas turmas.

Repare-se que as questões por nós acrescentadas ao teste de HART (1981) – Questões 3, 4, 6 – na tentativa de eliminar algumas das "confusões embutidas" referidas por FREUDENTHAL (1983) resultaram mais diretamente ligadas a algum tipo de experiência já supostamente mais vivenciada pela criança. Esse tipo de tradução de uma questão para uma situação mais próxima da criança nem sempre é fácil (ou sequer possível) mas, no nosso entender, pode facilitar a compreensão da situação pela criança no sentido pretendido, sem necessidade de se recorrer a extensas e numerosas explicações para evitar possíveis confusões ou distorções.

A nova versão do teste "Medidas" foi então administrada em duas escolas de 1º grau de Belo Horizonte, com características bem diferentes:

Escola A (Pitágoras): escola particular, situada na área central, freqüentada por alunos de classe média ou classe média alta.

Escola B (Dom Orione): escola pública, municipal, situada na periferia, freqüentada por alunos de classe popular ou classe média baixa.

Em cada escola testamos duas turmas de cada uma das seguintes séries: 6ª, 7ª e 8ª (idades variando dos 11 aos 19 anos). No total, participaram da pesquisa 407 alunos; 234 da escola A e 173 da escola B.

Antes de fazer a seleção das turmas onde o teste deveria ser administrado, foi explicado para os coordenadores de área de cada escola que nos ajudaram na viabilização desta pesquisa que o teste não versaria sobre conteúdos ou problemas que normalmente fazem parte do currículo de Matemática nas escolas, e que portanto eles não deveriam pretender selecionar as turmas "mais adiantadas". A seleção acabou sendo feita mais em função de disponibilidades de horário do que em função de qualquer outro critério, já que nós mesmos procedemos a todas as administrações do teste.

Passamos agora a apresentar, no quadro abaixo, os resultados obtidos nas questões que pretendemos comparar:

Questões: 1.b [ ] ; 2 [ ] ; 3.b [ ] ; 4 [ ] ; 5.b(A) [ ] ; 5.b(B) [ ] ; **6.a [Azulejo:4]; 6.b [Azulejo:16].**

Questão do teste \ Porcentagem de acertos	ESCOLA A (N = 234)	ESCOLA B (N = 173)	TOTAL (N = 407)
1.b	60.7%	43.4%	53.3%
2. (1)	46.2%	38.2%	42.8%
3.b (2)	81.2%	67.1%	75.2%
4.	80.3%	68.8%	75.4%
5.b (A) (3)	14.5%	5.8%	10.8%
5.b (B) (3)	13.7%	4.0%	9.6%
6.a [Azulejo: 4]	29.9%	22.5%	26.8%
6.b [Azulejo: 16]	17.9%	8.7%	14.0%

(1) Tanto a resposta "**mais de 8 cm**" como "**você não pode dizer quanto é**" foram contabilizadas como certas. O número de respostas do segundo tipo é muito inferior ao número de respostas do primeiro tipo; elas foram consideradas certas também, porque em entrevistas se verificou que elas podem ser originadas pelo fato do perímetro da figura A não ter uma medida inteira (o seu valor é 4 + 2).

(2) Foram contabilizados apenas os alunos que interpretaram o item *a* como se pretendia (a 2ª formiga seguindo a diagonal AC) *e, além disso,* deram a resposta certa em *b*. Quer dizer, foram excluídos aqueles alunos que descreveram o percurso da 2ª formiga como sendo ADC ou ABC, apesar de responderem certo a *b*.

(3) Foram consideradas certas as respostas equivalentes a multiplicar por 4 o resultado obtido em *a*, independentemente desse resultado.

Testamos a significância da diferença entre as porcentagens de acertos observadas nas questões que nos interessa comparar usando uma razão Z, dada por fórmula presente em GUILFORD (1978, p.159).

Nos dois quadros que se seguem indicamos os valores de Z obtidos em cada caso, e também os correspondentes valores do nível de significância (probabilidade de que a diferença entre as porcentagens tenha acontecido "por acaso"), nos casos em que ele foi considerado estatisticamente significativo (.001).

Embora existam algumas diferenças entre as porcentagens de acertos nas duas escolas (A e B), a seguir apresentamos apenas os resultados para a amostra total das duas escolas, porque o sentido e o nível de significância das diferenças que pretendemos analisar são idênticos em ambas, e idênticos ainda à situação geral descrita nos dois quadros seguintes.

Z	Questão 1b p = .533	Questão 2 p = .428	Questão 3b p = .752	Questão 4 p = .754
Questão 1b p = .533				
Questão 2 p = .428	Z= 2.9980			
Questão 3b p = .752	Z = 6.5186 (α = .001)	Z = 9.3974 (α = .001)		
Questão 4 p = .754	Z = 6.5822 (α = .001)	Z= 9.4590 (α = .001)	Z = .0662	

(N = 407)

Verifica-se, portanto, que tanto a Questão 3.b como a Questão 4 são significativamente mais fáceis que as Questões 1.b e 2, do teste original de HART (1981). Por sua vez, não existe uma diferença estatisticamente significativa entre o nível de facilidade dessas duas questões que foram acrescentadas ao teste de Hart (3.b e 4).

Z	Questão 5b(A) p = .108	Questão 5b(B) p = .096	Questão 6a [Azulejos: 4] p = .268	Questão 6b [Azulejo: 16] p = .140
Questão 5b(A) p = .108				
Questão 5b(B) p = .096	Z = .5656			
Questão 6a [Azulejos: 4] p = .268	Z = 5.8418 (α = .001)	Z = 6.3591 (α = .001)		
Questão 6b [Azulejos: 16] p = .140	Z = 1.3851	Z = 1.9456	Z= 4.5313 (α = .001)	

(N = 407)

A Questão 6.a foi significativamente mais fácil do que todas as outras [2], sendo que não existe mais nenhuma diferença estatisticamente significativa entre o nível de facilidade das três questões restantes.

CONCLUSÃO

Esta pesquisa parece indicar que, com efeito, a forma de colocar uma mesma questão de medição pode influenciar significativamente a porcentagem de acertos nessa questão. Por exemplo, certas formas que podem de algum modo estar mais diretamente ligadas a um determinado tipo de experiência já vivenciada pela criança atingiram níveis de facilidade significativamente mais elevados que as formas tradicionalmente utilizadas para testar a conservação de medidas. Daí o fato de ser necessário um pouco mais de precaução e muito mais pesquisa antes de realmente se poder concluir que as noções de medida são "tardiamente" adquiridas pelas crianças, e antes de se propor o adiantamento de todas as atividades de medição no ensino da Matemática.

Por outro lado, a pesquisa mostra que efetivamente as crianças têm dificuldades em *determinadas* atividades de medição. Isso não causa admiração, dada a pouca ênfase que a maioria dos professores de 1º grau dá atualmente a essas atividades, e visto que o fato de que a criança já domina algumas situações de medição mais próximas da sua vivência por si só não garante que ela seja capaz de fazer uma transferência para situações análogas, mas mais abstratas para ela.

Tendo em vista tais resultados, parece-nos possível e desejável que o currículo de Matemática dê, desde o início do 1º grau (e mesmo a nível de pré-escolar), uma grande relevância à medição. Mais pesquisas deveriam ser feitas sobre a possibilidade de se estabelecer uma relação mais estreita entre o ensino da medição e o ensino dos número, visando possibilitar à criança uma melhor compreensão da própria evolução do conceito de número. Além disso, propomos também que no 1º grau se inicie o estudo da geometria pela geometria euclidiana, e só mais tarde se faça referência a geometrias não-métricas, acompanhando, portanto, o desenvolvimento histórico da própria geometria.

Não devemos esquecer que, historicamente, as noções matemáticas mais gerais e simples surgem depois: Topologia e Geometria Projetiva depois de Geometria Euclidiana; Conjuntos depois de Números; Relações depois de Funções; etc. Também psicologicamente a ordem de tomada de consciência parece ir no mesmo sentido: do mais restrito e complexo, para o mais geral, simples e abstrato; sentido esse que, como PIAGET (1971, p.6) observa, parece ser o contrário do da gênese do conhecimento na criança.

O chamado "Movimento da Matemática Moderna" partiu do pressuposto (errado, no nosso entender) de que o ensino da Matemática devia acompanhar essa ordem de construção geral seguida pela criança, partindo das estruturas matematicamente mais simples para as mais complexas (por exemplo, das noções topológicas para as noções euclidianas), esquecendo que na hora de explicitar e tomar consciência dessas estruturas, como se pretende no ensino, a ordem deverá ser a inversa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

CASTELNUOVO, E. *Didattica della Matematica*. Firenze, La Nuova Italia Editrice, 1963.

DIENES, Golding. *A Geometria pelas transformações: topologia, geometria projetiva e afim*. São Paulo, Editora Herder, 1971.

FREUDENTHAL, H. *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht-Holland, D. Reidel Publishing Company, 1983.

——. Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in mathematics*, s. l; *3* : 413-35, 1971.

——. *Mathematics as an educational task*. Dordrecht-Holland, D. Reidel Publishing Company, 1973.

GUILFORD, J. P. & FRUCHTER, B. *Fundamental statistics in psychology and education*. McGraw Hill International Book Company, 1978.

HART, K. M; ed. *Children's understanding of mathematics: 11r16*. London, John Murray, 1981.

KLEIN, Félix. *Matematica elemental desde un punto de vista superior*. Madrid, Biblioteca Matemática, 1931. v.2

MESERVE, B. E. Geometry as a gateway to mathematics. In: *Developments in mathematical education: proceedings of the second international congress on mathematical education*. Cambridge University Press, 1973. p. 241-53.

PAPY. *Mathématique moderne 3: voici Euclide* . Bruxelles, Éditions Didier, 1967.

——. *Mathématique moderne 6: geométrie plane*. Bruxelles, Éditions Labor, 1967.

PIAGET, J. et alii. *La enseñanza de las matematicas*. Madrid, Aguilar, 1971.

——. *La geométrie spontanée de l'enfant*. Paris, Presses Universitaires de France, 1973.

PIAGET, J. & INHELDER, B. *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris, Presses Universitaires de France, 1977.

UNESCO. *Tendances Nouvelles de L'enseignement de la mathématique*. Paris, Unesco, 1973. p. 32. v.3