

Utilização do software R para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem da análise combinatória

*Adriane Caroline Teixeira Portela*¹

*Hugo Henrique Gonsalves dos Santos Oliveira*²

*Denise Nunes Viola*³

RESUMO

Muitos métodos estatísticos se fundamentam na análise combinatória, um conteúdo presente em todos os níveis de ensino que auxilia na construção do pensamento estatístico e probabilístico. Na sociedade atual, altamente tecnológica e digital, há uma valorização significativa da utilização de ferramentas computacionais interativas e gratuitas. Nesse contexto, o estudo propõe uma nova ferramenta computacional no software R, uma árvore de decisão, que auxilia na identificação do tipo de análise combinatória a ser aplicada em um determinado problema. Realizou-se um estudo piloto e constatou-se que a ferramenta pode ser uma opção viável e inovadora para auxiliar no ensino da análise combinatória, pois teve aceitação por parte de seus participantes. A relevância dessa ferramenta está relacionada à aplicabilidade dos conceitos de análise combinatória em diversos contextos do cotidiano, uma vez que sua compreensão auxilia no desenvolvimento do pensamento crítico e na tomada de decisões. Dessa forma, busca-se contribuir para o desenvolvimento de algumas habilidades necessárias para o letramento estatístico e probabilístico dos alunos.

PALAVRAS-CHAVE: Análise Combinatória. Software R. Ferramenta computacional. Árvore de decisão. Letramento Estatístico.

¹Bacharel em Estatística. Escola Nacional de Ciências Estatística (ENCE), Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-0566-4071>. E-mail: adrianeportela@usp.br.

²Bacharel em Ciência da Computação. Universidade Federal da Bahia (UFBA), Salvador, Bahia, Brasil. Orcid: <https://orcid.org/0009-0000-0538-8962>. E-mail: hugoholiveira45@gmail.com.

³Doutorada em Estatística. Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" da Universidade de São Paulo (ESALQ/USP). Piracicaba, SP, Brasil. Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-8458-9489>. E-mail: viola@ufba.br.

Using R software to assist in the teaching-learning process of combinatorial analysis

ABSTRACT

Many statistical methods are based on combinatorial analysis, a topic present at all levels of education that assists in the development of statistical and probabilistic thinking. In today's highly technological and digital society, a significant emphasis is placed on the use of interactive and free computational tools. In this context, this paper proposes a decision tree, a new computational tool in R software that assists in identifying the type of combinatorial analysis to be applied to a specific problem. A pilot study conducted revealed the tool can be a viable and innovative option for teaching combinatorial analysis, according to its participants. The tool is of particular relevance for the applicability of combinatorial analysis concepts to various everyday contexts, since its understanding aids in the development of critical thinking and decision-making. The aim is to contribute to the development of some skills necessary for students' statistical and probabilistic literacy.

KEYWORDS: Combinatorial Analysis. R Software. Computational Tool. Decision Tree. Statistical literacy.

Uso del software R para ayudar en el proceso de enseñanza-aprendizaje del análisis combinatorio

RESUMEN

Muchos métodos estadísticos se fundamentan en el análisis combinatorio, un contenido presente en todos los niveles de enseñanza que ayuda en la construcción del pensamiento estadístico y probabilístico. En la sociedad actual, altamente tecnológica y digital, se valora significativamente el uso de herramientas computacionales interactivas y gratuitas. En este contexto, el estudio propone una nueva herramienta computacional en el software R, un árbol de decisión, que ayuda a identificar el tipo de análisis combinatorio a aplicar a un problema específico. Se realizó un estudio piloto y se encontró que la herramienta podría ser una opción viable e innovadora para ayudar en la enseñanza del análisis combinatorio, ya que fue aceptada por sus participantes. La relevancia de esta herramienta está relacionada con la aplicabilidad de los conceptos de análisis combinatorio

en diversos contextos cotidianos, ya que su comprensión ayuda al desarrollo del pensamiento crítico y la toma de decisiones. De esta manera, se busca contribuir al desarrollo de algunas habilidades necesarias para la alfabetización estadística y probabilística de los estudiantes.

PALABRAS CLAVE: Análisis combinatorio. Software R. Herramienta computacional. Árbol de decisión. Alfabetización estadística.

* * *

Introdução

Muitos métodos da Estatística têm como alicerce a análise combinatória, um conteúdo presente em todos os níveis educacionais que, além disso, contribui para o desenvolvimento do pensamento estatístico e probabilístico. No entanto, no Brasil, somente no final da década de 1990 o ensino da Estatística é oficialmente inserido como conteúdo curricular pelos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997, 1998, 2000). Antes disso, a Estatística era considerada como "tratamento da informação".

Os PCN, orientações governamentais, têm um papel de guia na educação nacional, oferecendo diretrizes para o ensino. São organizados por disciplina; desse modo, apresentam orientações específicas para o ensino da Estatística e da Probabilidade dentro da disciplina de Matemática. Isso pode ser visto como a parte não-determinística da disciplina, também conhecida como estocástica.

Posteriormente, os currículos adotados nas escolas brasileiras passaram por uma segunda reformulação, realizada por meio da implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017, 2018). A BNCC, uma referência obrigatória, foi concebida com o intuito primordial de estabelecer uma sistematização dos conteúdos educacionais. Além disso, a BNCC destaca a importância da utilização de tecnologias, inclusive de softwares. Tais recursos didáticos precisam estar integrados a situações que levem à reflexão (BRASIL, 2017, 2018).

No âmbito da Estatística, a BNCC estabelece diretrizes para o ensino de Probabilidade, indicando que o desenvolvimento dessa área de conhecimento ocorra de forma progressiva, seguindo uma perspectiva de espiral. Tal abordagem implica que os conceitos probabilísticos sejam gradualmente apresentados, revisados e aprofundados desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio, abrangendo um período educacional de mais de 10 anos. Ainda de acordo com a BNCC, a unidade temática de Probabilidade e Estatística aborda a incerteza e o tratamento de dados. Além disso, incentiva habilidades para lidar com situações-problema do cotidiano, ciências e tecnologia.

Para adquirir tais habilidades, é essencial que todos os cidadãos sejam capazes de coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em diferentes contextos, a fim de tomar decisões fundamentadas. Isso requer a utilização de raciocínio, conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e prever fenômenos (BRASIL, 2017, 2018). Portanto, espera-se que os alunos desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de aplicação da Matemática na resolução de problemas, utilizando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las de acordo com os contextos das situações.

O estudo da Estatística e da Probabilidade possui uma enorme relevância na vida dos alunos, conforme destacado por Gal (2005). A aprendizagem da Probabilidade transcende os meros conceitos escolares, abrangendo as práticas sociais das pessoas. No entanto, é notória a precariedade e, muitas vezes, a ausência da abordagem de conteúdos relacionados ao conjunto de conhecimentos da Estatística, Probabilidade e Combinatória na Educação Básica, e até mesmo durante os cursos de formação dos futuros professores.

Em seu estudo, Lopes (2008) investigou o ensino de Estatística e Probabilidade na formação inicial de professores de Matemática que atuam na Educação Básica. A autora identificou que os professores tendiam a focar apenas nos tópicos tradicionais da Matemática, como Números, Operações, Grandezas, Medidas, Álgebra e Geometria, sendo negligenciada a abordagem

de Probabilidade e Estatística. Essa tendência foi chamada de paradigma da linearidade, no qual os conteúdos determinísticos são privilegiados e os conceitos não-determinísticos não são ensinados.

Vale ressaltar que a Educação Estatística desempenha um papel significativo no processo educacional em geral, bem como na formação de professores de Matemática para a Educação Básica. Um dos principais objetivos dessa educação é promover o letramento estatístico, reconhecendo que a alfabetização estatística dos cidadãos é uma necessidade imediata. No entanto, ainda encontramos muitos desafios no ensino de conteúdos inerentes à Estatística, em particular da análise combinatória. Um dos principais desafios no ensino da análise combinatória reside na correta conexão entre o problema apresentado e a teoria correspondente, muitas vezes resultando na excessiva utilização de fórmulas em detrimento da compreensão da natureza subjacente à questão proposta.

A ferramenta proposta busca incentivar a decomposição do problema em componentes menores, permitindo uma compreensão mais profunda de sua essência. Também ajuda os professores a acompanhar o progresso individual de cada aluno, identificando áreas que podem precisar de mais apoio e orientação. Além disso, ela disponibiliza acesso a recursos de aprendizado interativos, os quais podem contribuir para que os alunos compreendam os conceitos de maneira mais envolvente e prática, tornando as aulas mais dinâmicas.

Adicionalmente, a ferramenta foi concebida com o propósito de estar em consonância com as diretrizes estabelecidas pela BNCC, visando atender algumas das competências esperadas na unidade temática de Probabilidade e Estatística. Isso inclui a capacidade de identificar situações do cotidiano nas quais seja necessário fazer escolhas considerando riscos probabilísticos, como quando se deparam com diferentes alternativas em uma árvore de decisão.

Através da exploração detalhada de questões, os alunos têm a oportunidade de correlacionar os conceitos da análise combinatória a exemplos práticos de aplicação em situações do mundo real, estabelecendo

uma conexão direta com o letramento estatístico. Isso facilita a compreensão de como tais conceitos podem ser úteis em suas vidas e, por fim, a proposta incentiva a colaboração ao permitir que os alunos trabalhem conjuntamente na resolução de problemas relacionados à análise combinatória.

Portanto, considerando a relevância do ensino da Estatística e da Probabilidade no Ensino Básico e a importância do desenvolvimento do letramento estatístico para a formação crítica dos cidadãos, em particular na nossa sociedade digital e tecnológica, torna-se evidente a valorização de ferramentas computacionais interativas e gratuitas. Nesse contexto, este estudo tem como objetivo principal proporcionar uma ferramenta destinada a auxiliar tanto estudantes quanto professores para aprimorar a compreensão e aplicação dos conceitos relativos à análise combinatória, fomentando a construção progressiva desses conceitos por meio de uma estratégia de ensino mais atrativa.

Fundamentação teórica

Diversos fatores podem influenciar o desenvolvimento e a compreensão do raciocínio e do pensamento estatístico e probabilístico, dentre eles o raciocínio combinatório. Desde os anos iniciais do ensino básico, é necessário e incentivado a utilização do raciocínio combinatório, que engloba os princípios fundamentais da análise combinatória, por meio de atividades lúdicas e resolução de problemas que estejam contextualizados no cotidiano dos alunos.

Letramento estatístico e probabilístico

De acordo com Gal (2002), há uma concepção de letramento geral que se relaciona às habilidades de leitura e escrita. No entanto, além disso, existe também o conceito de letramento estatístico. Esse tipo de letramento envolve a capacidade de avaliar criticamente, interpretar e expressar opiniões sobre dados estatísticos.

Além disso, segundo o autor, o letramento estatístico é uma competência essencial para o exercício pleno da cidadania em uma sociedade que está constantemente inundada de informações. Gal (2002) destaca que o letramento estatístico é construído a partir de uma postura crítica e investigativa, envolvendo conhecimentos fundamentais em Estatística e Matemática, habilidades de leitura e análise, bem como crenças, atitudes e um entendimento do indivíduo e ao mundo ao seu redor. Essa perspectiva implica em ações socioculturais, nas quais as pessoas se engajam em interações e leituras críticas do mundo que as cerca.

Ademais, Gal (2005) introduz o conceito de letramento probabilístico, que diz respeito à capacidade de uma pessoa ler, interpretar e analisar criticamente informações relacionadas a probabilidades. Esse tipo de letramento envolve o entendimento dos conceitos de aleatoriedade, evento, espaço amostral, variabilidade, bem como a compreensão dos diferentes significados de probabilidade e risco. Com isso, é apreciado e incentivado o raciocínio combinatório.

O autor afirma ainda que o letramento estatístico está intimamente ligado ao letramento probabilístico, que deve ser introduzido nos primeiros anos de escolaridade e deve contribuir para a previsão de várias questões críticas relacionadas com diferentes situações. O presente estudo se baseia na premissa de que um dos fundamentos essenciais para desenvolver e aprimorar o letramento estatístico é o letramento probabilístico, que inclui o raciocínio combinatório.

Raciocínio combinatório e análise combinatória

Segundo Borba (2013), o raciocínio combinatório refere-se a um conjunto de métodos matemáticos que possibilitam a resolução de situações envolvendo possibilidades e arranjos. Esses métodos incluem arranjo, combinação e permutação, os quais estão conectados por relações básicas no campo da análise combinatória. No entanto, cada um deles possui suas

próprias características e requer a utilização de representações simbólicas adequadas para explorar de forma precisa as diferentes possibilidades.

Ao contrário do que muitos pensam, o raciocínio combinatório pode ser abordado de diferentes maneiras, e não somente com fórmulas e em níveis educacionais mais avançados. Por exemplo, ao incentivar o aluno a pensar de quantas maneiras diferentes pode colorir um desenho, se vestir para uma festa do colega de classe ou até mesmo as possibilidades de trajetos de casa até a escola. A perspectiva de introduzir o ensino desses conceitos durante a Alfabetização Matemática e Estatística é respaldada pelos PCN (BRASIL, 1998) e reforçada pela BNCC (BRASIL, 2017), conforme visto anteriormente.

Quando o raciocínio combinatório é abordado de forma a fomentar a construção do conhecimento estatístico, uma série de relações é estabelecida, auxiliando os alunos a ampliar suas estratégias de resolução de problemas e compreender o conteúdo de maneira mais completa. Isso resulta em novas aprendizagens, que são fundamentais para a consolidação do letramento estatístico. Fica evidente, portanto, que o letramento estatístico desempenha um papel relevante na formação abrangente do indivíduo como cidadão.

A análise combinatória permite calcular o número de possibilidades de eventos específicos, levando em consideração certas condições. De acordo com Roxo et al., (1944, p. 81), a análise combinatória é uma área da Matemática que estuda a formação, contagem e propriedades de agrupamentos que podem ser criados de acordo com critérios específicos, como os elementos de uma coleção. Esses agrupamentos são essencialmente divididos em três tipos: arranjos, permutações e combinações, e podem ser formados por objetos distintos ou repetidos.

Para Carvalho et al., (2016) a análise combinatória é utilizada para ilustrar e/ou calcular todas as possibilidades de ordenação dos elementos finitos com base em critérios de contagem, sendo ainda aplicada nos conceitos de probabilidade e em lógica matemática. Entender esses conceitos é de grande importância para estudos e cálculos de probabilidade.

O ensino da análise combinatória: desafios e ferramentas tecnológicas

Uma parcela significativa de questões relacionadas à análise combinatória tende a ser considerada difícil tanto por alunos quanto por professores. Um dos principais desafios reside na correta conexão entre o problema apresentado e a teoria correspondente.

Muitos alunos tendem a se concentrar em memorizar fórmulas em vez de compreender o que está sendo solicitado e como resolver a questão proposta. Para os alunos, a principal dificuldade geralmente reside na interpretação do enunciado do problema e na aplicação adequada das fórmulas para respondê-lo, o que pode gerar confusão. Por outro lado, os professores devem transmitir o conteúdo sem sobrecarregá-lo com excesso de fórmulas, o que contraria a prática usual em que conceitos e princípios são apresentados de forma automática, seguidos de exercícios padronizados.

Aranão (2011, p. 12) reforça que o professor é o principal mediador na construção do conhecimento, pois é ele quem promove dentro do ambiente escolar situações em que o aluno exercite a capacidade de pensar, e conseqüentemente, busque soluções para os exercícios propostos. Vale lembrar que a discussão sobre a lacuna entre o material didático e o ato de ensinar é antiga. Cabe ao professor a descoberta da maneira mais eficaz de introduzir conteúdos utilizando diferentes metodologias para lidar com perguntas e ações dos alunos. Portanto, o professor possui um papel ímpar na construção do conhecimento, conforme Ball e Cohen (1996) enfatizaram há décadas.

No entanto, a utilização de novas ferramentas de ensino tornou-se, nos últimos anos, tema de muitos debates voltados à discussão de como os professores podem cumprir os conteúdos programáticos ao passo que inovam no modo de ensinar. Spenassato e Giaretta (2009) defendem que as metodologias de ensino diferenciadas servem para tornar o processo de ensino-aprendizagem mais prazeroso e quando os docentes trazem uma perspectiva tradicional, o entendimento de assuntos abstratos é dificultado, dado que o conhecimento é um processo de construção no indivíduo.

Os conteúdos relacionados à Estatística no âmbito da Educação Básica estão integrados na ementa da disciplina de Matemática. Os professores frequentemente relatam a dificuldade em conseguir abranger todo o currículo anual, resultando na redução ou até mesmo exclusão dos tópicos de Estatística do programa educacional dos alunos. Além disso, muitos confessam ter dificuldades para ensinar esses assuntos específicos e/ou não possuem domínio completo sobre os mesmos. Por outro lado, os alunos expressam sua dificuldade em compreendê-los.

É amplamente reconhecido que o ensino da Matemática tem sido constantemente desafiador em vários níveis de educação, especialmente no que diz respeito aos conteúdos abrangidos pela análise combinatória e probabilidade. Segundo Mello (2017), esses temas são de extrema importância, pois possibilitam aos alunos ampliarem e formalizarem seus conhecimentos sobre raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico.

Para além, é notório que vivemos em uma sociedade na era digital. Segundo Fantin e Rivoltella (2012), dada esta característica, é exigido dos profissionais novas competências e habilidades, e quando se trata do profissional da área da educação, especificamente dos professores, é demandado uma apropriação pedagógica das tecnologias digitais, com o intuito de integrá-las ao currículo escolar.

Allevato (2005) reforça que as tecnologias possuem um diferencial quando empregadas para criar novos processos de resolução de questões, pois implicam em atividades que promovem a colaboração dos alunos, a investigação, a discussão e a troca de ideias entre eles. A utilização de tecnologias como facilitador para a compreensão dos conteúdos é um diferencial nos ambientes escolares, tanto para professores quanto para alunos. Fischbein (1994) defende ideias acerca da relevância de integrar os componentes intuitivo, algorítmico e formal, considerados básicos na atividade matemática. Ele ainda enfatiza que a condição básica para o desenvolvimento de um raciocínio matemático eficiente é constituída pela exploração da relação entre o aspecto algorítmico e o formal.

Metodologia

Como citado anteriormente, este artigo tem por objetivo propor uma nova ferramenta para auxiliar no direcionamento e compreensão da utilização da análise combinatória, principalmente no contexto da probabilidade estatística. Sendo assim, há o interesse em tornar o processo de aprendizagem mais atrativo e, assim, fortalecer e consolidar o pensamento crítico dos alunos. Para alcançar esse objetivo, foi desenvolvida uma árvore de decisão que auxilia na identificação da análise combinatória mais adequada para resolver um problema/questão.

Uma árvore de decisão, conforme definido por Monard et al. (2003), é uma representação gráfica de um modelo de tomada de decisão, que mostra as diferentes opções disponíveis, seus possíveis resultados e as consequências associadas a cada escolha. É uma estrutura hierárquica composta por nós e galhos/ramos, em que cada nó representa uma pergunta ou condição a ser avaliada, e os galhos/ramos representam as diferentes opções ou caminhos que podem ser seguidos. A partir das respostas às perguntas ou condições, a árvore de decisão permite determinar o próximo nó a ser explorado até chegar a uma solução final (nó terminal ou folha). Cada resultado de uma pergunta conduz a um caminho para uma subárvore, mantendo a mesma estrutura.

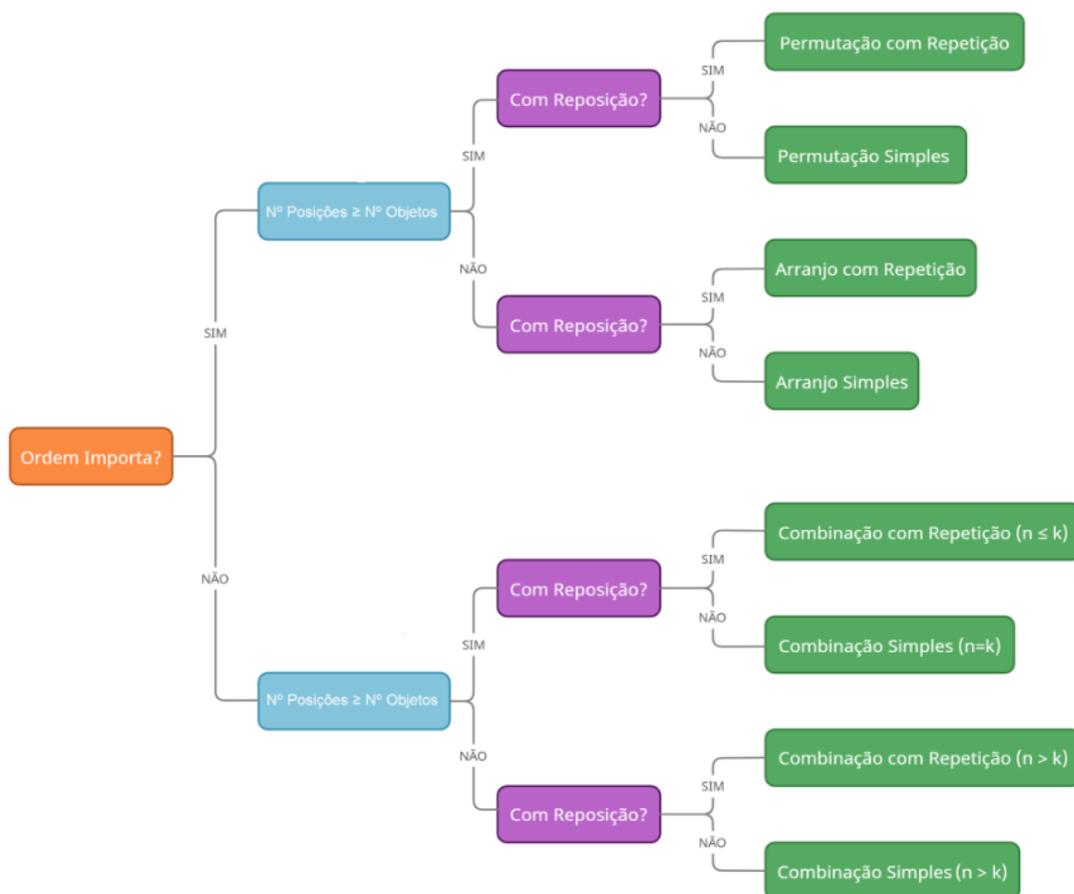
A utilização de uma árvore de decisão permite representar as opções disponíveis e os possíveis caminhos a serem seguidos, estabelecendo assim um "algoritmo" para as escolhas a serem feitas e resultando nas possibilidades de análise combinatória. Essa ferramenta promove a reflexão do usuário por meio de três perguntas dicotômicas, as quais auxiliam na identificação da técnica de análise combinatória apropriada e podem ser respondidas em qualquer ordem. Dessa forma, a ferramenta busca estimular a investigação e o questionamento dos usuários diante do problema apresentado, evitando a aplicação mecânica de fórmulas.

Por meio da árvore de decisão, é possível decompor o problema em partes menores, a fim de facilitar a compreensão dos alunos em relação aos problemas propostos e incentivar o pensamento crítico na resolução. A árvore

é composta por três perguntas: “A ordem importa?”, “O número de posições é maior ou igual ao número de objetos?” e “Apresenta repetição de objetos?”. Cada pergunta é abordada individualmente e pode ser respondida fora de ordem, com uma resposta binária ("sim" ou "não").

A Figura 1 ilustra uma árvore de decisão numa das possibilidades que podem ser estruturadas; optamos pela configuração referida no parágrafo anterior. Após responder a primeira questão, o aluno avança para o próximo ramo da árvore, respondendo assim às próximas perguntas. Portanto, cada resposta levará a um caminho diferente, tendo assim, ao final, de acordo com a combinação das respostas das três perguntas, qual tipo de análise combinatória é indicada para resolver o problema proposto.

FIGURA 1: Ilustração da árvore de decisão implementada no Software R para gerar a ferramenta proposta



Fonte: Elaborada pelos autores.

Logo em seguida são apresentadas as possíveis respostas às perguntas dicotômicas, que são: “Permutação com repetição”, “Permutação simples”, “Arranjo com repetição”, “Arranjo simples”, “Combinação com repetição com número de objetos menor igual ao de posições”, “Combinação simples com mesmo número de objetos”, “Combinação com reposição com número de objetos maior que posições”, “Combinação simples com número de objetos maior que posições”. Depois de ler a questão apresentada, o aluno deve refletir sobre ela, responder às perguntas e seguir o fluxograma até chegar a uma das conclusões.

Por exemplo, consideremos a seguinte questão:

Exemplo 1: "Sabendo que as placas dos veículos são formadas por três letras e quatro números, quantas placas existem?" Nesse caso, verifica-se que a ordem importa, que o número de objetos não é igual ao número de posições, e que se trata de uma retirada com reposição. Portanto, as respostas são “sim”, “não” e “sim”, que acarretará em “Arranjo com repetição”.

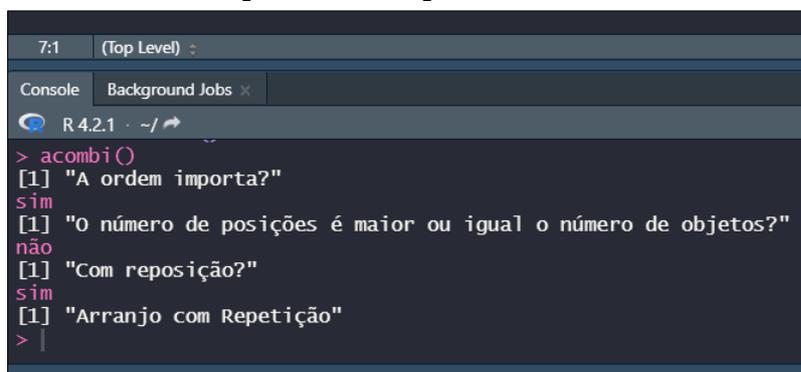
Após a elaboração do fluxograma correspondente à árvore de decisão, foi desenvolvida uma função denominada "acombi()" na linguagem de programação e software R (R Core Team, 2021). O R é uma linguagem de programação frequentemente utilizada como uma ferramenta para análise estatística e manipulação de dados. Suas capacidades funcionais abrangem desde a realização de cálculos simples, criação de tabelas e gráficos, até aplicações mais complexas, como a construção de intervalos de confiança, testes de hipóteses, modelagem linear e não-linear, bem como a criação de mapas.

Atualmente, o R é uma das linguagens de computação estatística com maior crescimento em escala global. Essa ascensão é atribuída, em parte, à contínua expansão de sua comunidade de usuários, que se dedica a contribuir com o desenvolvimento de pacotes. Tais pacotes consistem em conjuntos de pequenos programas que agregam novas funcionalidades ao sistema. Além da linguagem R em si, a ferramenta RStudio também foi empregada no contexto do estudo (RStudio Team, 2023). O RStudio é um ambiente de desenvolvimento integrado

de software livre voltado para a utilização do R. O RStudio é programado em C++ e faz uso do framework Qt para sua interface gráfica de usuário.

A função criada segue os mesmos passos descritos anteriormente, tornando-se mais atraente para os alunos, uma vez que a utilização da tecnologia é uma grande ferramenta na educação. A Figura 2 ilustra a utilização da ferramenta no Exemplo 1.

FIGURA 2: Aplicação da ferramenta e saída no console do Software R para o exemplo 1.



```
7:1 (Top Level) :  
Console Background Jobs x  
R 4.2.1 ~/  
> acomb()  
[1] "A ordem importa?"  
sim  
[1] "O número de posições é maior ou igual o número de objetos?"  
não  
[1] "Com reposição?"  
sim  
[1] "Arranjo com Repetição"  
> |  
>
```

Fonte: Elaborada pelos autores.

A função "acombi()" foi desenvolvida de forma a apresentar as perguntas sequencialmente na tela, permitindo que o aluno responda cada uma delas na ordem determinada. Ao final do processo, a função exibirá a análise combinatória recomendada para a resolução da questão proposta, assim como ocorreria na versão impressa. Devemos destacar que a referida função não aceita variações na escrita, tais como "SIM" ou "Sim". A fim de proporcionar uma compreensão mais eficaz dessa ferramenta, os autores disponibilizaram um breve tutorial, juntamente com o código da função e exemplo prático, em um projeto hospedado no Rpubs (Rpubs, 2023). Esse tutorial foi elaborado de forma a facilitar sua replicação por parte dos leitores.

Cabe ressaltar que essa ferramenta tem o foco em facilitar e encorajar a reflexão diante dos problemas propostos. Caso o usuário tenha abordado o problema de maneira diferente do esperado, a função fornecerá uma sugestão incorreta para a resolução do problema/questão.

A Aplicação

O objetivo deste experimento consistiu em avaliar a eficácia e o potencial da nova ferramenta proposta como um recurso motivador no ensino da análise combinatória. Especificamente, buscou-se investigar se a função "acombi()" apresentava a capacidade de se tornar uma ferramenta útil no auxílio à compreensão e resolução de problemas relacionados à análise combinatória por meio de abordagens computacionais. Além disso, o estudo teve como propósito avaliar o nível de conhecimento dos alunos do ensino médio em relação a esse conteúdo, considerando sua relevância em diferentes níveis educacionais e a sua recorrência nas avaliações nacionais, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e outros exames de ingresso ao ensino superior no Brasil.

Decidiu-se conduzir o experimento em uma instituição de ensino pertencente à rede pública de Salvador, Bahia. Foi selecionada uma turma do último ano do ensino médio, pressupondo que os alunos já haviam sido expostos ao conteúdo de análise combinatória, uma vez que, de acordo com a BNCC, esses temas devem ser introduzidos no ciclo fundamental e aprofundados no ensino médio.

A seleção da instituição de ensino foi embasada em uma parceria estabelecida previamente com a escola, intermediada por uma estudante da turma em questão que atuava como bolsista no âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica Júnior (PIBIC Jr). Além disso, o professor responsável pela disciplina de Matemática na turma já participava de outros projetos relacionados à Estatística no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal da Bahia (IME-UFBA). Essa conjunção de fatores proporcionou um contexto propício para a realização do estudo.

Inicialmente, com o intuito de avaliar a receptividade da função `acombi()`, conforme ilustrada na Figura 2, realizou-se um estudo no IME-UFBA, situado em Salvador-BA, no dia 2 de março de 2018. Os laboratórios de informática do IME-

UFBA estão devidamente equipados com o software R e o RStudio instalado em todos os computadores, o que proporcionou facilidades na condução da aplicação.

O experimento foi conduzido com a participação de 17 estudantes voluntários do 3º ano do Colégio da Polícia Militar de Salvador-BA. Os participantes foram divididos aleatoriamente em dois grupos, sendo o primeiro composto por oito indivíduos e o segundo por nove. Cada grupo recebeu um conjunto de seis questões relacionadas à análise combinatória e probabilidade. Na Figura 3, temos o registro da turma em um dos laboratórios do IME-UFBA durante a etapa de resolução dos exercícios propostos no dia da aplicação.

FIGURA 3: Registro da turma no laboratório do IME-UFBA no dia da aplicação da ferramenta proposta.



Fonte: Elaborada pelos autores.

O objetivo da resolução dos exercícios propostos foi determinar o tipo de análise combinatória adequada para cada um dos problemas apresentados, sem a necessidade de uma resolução numérica.

Ambos os grupos foram expostos aos dois métodos de resolução das questões. Em outras palavras, do total de seis questões resolvidas individualmente pelos alunos, metade delas foram abordadas utilizando o software R, por meio da função `acombi()`, enquanto as demais questões foram resolvidas de maneira tradicional. Este último método contou com o auxílio de modelos concretos, recursos palpáveis de baixo custo, como, por exemplo, a

utilização da árvore de decisão impressa em folha de papel e figuras que ilustravam os objetos das questões, auxiliando na compreensão.

A dinâmica ocorreu em duas etapas. Inicialmente, os grupos resolveram três questões, sendo que um grupo utilizou o método computacional com o auxílio do software R, enquanto o outro grupo empregou os modelos concretos. Em um segundo momento, os grupos alternaram entre os métodos e resolveram mais três questões subsequentes.

É relevante salientar que as questões foram resolvidas de forma individual pelos alunos, sendo a divisão em grupos utilizada apenas para intercalar os métodos e as questões. Além disso, para cada questão, os alunos receberam individualmente um conjunto de modelos concretos como uma ferramenta adicional para auxiliar na visualização das possibilidades de combinações.

Posteriormente, os exercícios propostos foram resolvidos conjuntamente, sendo discutidos um por um. As explicações foram apresentadas no quadro, e foram realizadas atividades interativas com os alunos para os ajudar a desenvolver o raciocínio necessário para lidar com as questões. Quando um aluno errava a resposta, era uma oportunidade para identificar qual das três questões dicotômicas da árvore de decisão ele tinha uma perspectiva divergente.

A seguir, são apresentadas três das questões utilizadas no experimento e suas respectivas classificações de análise combinatória de acordo com a árvore de decisão apresentada na Figura 1:

1. “Em um restaurante, para compor um prato, um cliente deve selecionar quatro ingredientes, sendo que, necessariamente, pelo menos um deles deve ser um legume. Há sete opções de legumes. De quantas maneiras o cliente pode montar o prato?” “Combinação com Repetição ($n > k$)”;

2. “Em uma competição de xadrez existem oito jogadores. De quantas formas diferentes poderá ser formado o pódio (primeiro, segundo e terceiro lugares)?” “Arranjo Simples”;

3. “Beatriz quer organizar dez livros numa prateleira, sendo quatro livros de matemática, três de física e três de química. De quantas maneiras

ela pode organizar os livros na prateleira mantendo os livros de mesmo assunto juntos?” “Permutação Simples”

Ao final do experimento, como forma de avaliação, foi conduzido um questionário junto aos alunos, solicitando-lhes que atribuíssem uma nota de zero a dez para indicar a facilidade de compreensão e resolução dos exercícios propostos, levando em consideração os métodos utilizados, tanto com o auxílio do software R quanto sem ele.

Resultado e Discussão

A pesquisa propõe uma nova ferramenta computacional para auxiliar no ensino e aprendizagem da análise combinatória, sobretudo no contexto da probabilidade estatística. Os resultados apresentados referem-se à aplicação da ferramenta em um experimento com alunos do ensino médio, com o intuito de avaliar a eficácia e o potencial desse novo recurso lúdico no ensino da análise combinatória.

A abordagem da aplicação priorizou o aprimoramento do conhecimento do conteúdo de análise combinatória por meio de uma estratégia pedagógica lúdica, com o aluno desempenhando um papel ativo no processo de ensino-aprendizagem. Além disso, com a utilização da ferramenta, buscou-se atingir o que é proposto na BNCC acerca da utilização de tecnologias, incluindo softwares, para promover situações que levassem à reflexão diante das questões apresentadas.

Foi solicitado aos participantes que atribuíssem uma nota de zero a dez em relação à facilidade de compreensão e resolução dos exercícios propostos com base no método empregado. Observou-se uma média de notas de 9,04 e 9,44, respectivamente, quando utilizados modelos concretos e a função "acombi()" do software R. Isso indica que ambos os recursos foram bem avaliados, com notas atribuídas bem próximas em média. No entanto, por meio dos feedbacks fornecidos pelos participantes, foi possível perceber que a ferramenta computacional se destacou, como evidenciado a seguir por meio de alguns dos comentários recebidos:

Participante A: “Achei maravilhoso, principal pelo fato de não precisar de internet para a sua utilização.”

Participante B: “Acho que ajudou bastante pra compreensão e realização dos exercícios.”

Participante C: “Bem interessante, ótima ideia da árvore, bem inovador o que foi apresentado. gostei bastante.”

Participante D: “Muito bom, pois, oferece a oportunidade do professor sair da zona de conforto no ensino desse conteúdo, além de proporcionar várias discussões na sala de aula com os estudantes.”

Participante E: “Gostei muito do pacote, pois facilita a resolução e o entendimento dos estudantes.”

Participante F: “Achei bastante interessante a utilização do pacote RACom, uma vez que o conteúdo de análise combinatória é muito abstrata e o software vim a contribuir de maneira significativa para a aprendizagem do estudante.”

As notas atribuídas à facilidade de compreensão refletem apenas o nível de apreciação dos recursos pelos alunos e a sua eficácia para o ajudar a compreender a questão. Isto não significa necessariamente que os alunos tenham respondido corretamente às perguntas. Por conseguinte, as classificações dos estudantes quanto à facilidade de compreensão não precisam de estar diretamente relacionadas com as taxas de respostas corretas às perguntas.

Ainda que o aluno tenha indicado uma maior facilidade de compreensão ao utilizar a função “acombi()”, as taxas de acerto utilizando o método concreto e a função “acombi()” do software R foram de 46% e 32%, respectivamente. Observa-se que ambas as taxas de acerto são baixas, o que evidencia uma lacuna no conhecimento de análise combinatória por parte dos participantes como um todo. Tal indicativo pode estar diretamente relacionado à falta de abordagem adequada e/ou ausência desses conteúdos dentro da sala de aula,

conforme mencionado anteriormente, o que acarreta na negligência de uma das bases fundamentais para o ensino de Probabilidade e Estatística.

É plausível inferir que a diminuição da taxa de sucesso observada no método que utiliza a ferramenta é atribuível à falta de familiaridade dos alunos com o software R, uma vez que foi a primeira vez que os alunos tiveram contato com o software R e a ferramenta. É importante ressaltar que essa situação também está intrinsecamente ligada à realidade predominante nas escolas públicas brasileiras, caracterizada pela ausência de ambientes devidamente estruturados e de recursos didáticos tecnológicos.

Este estudo reforça a importância de continuar a promover e incentivar o pensamento reflexivo e crítico em todos os níveis de ensino, particularmente no Ensino Básico. Desta forma, a habilidade de refletir e dominar a aplicação de conteúdos da análise combinatória em diferentes contextos será potenciada através da utilização da ferramenta proposta, resultando em indivíduos mais capazes e letrados, cuja tomada de decisão será provavelmente mais coerente em situações do cotidiano.

Os feedbacks dos alunos demonstraram empolgação e entusiasmo com a ferramenta e o software R. Isso reafirma o que muitos estudos apontam: o ensino lúdico fornece uma abordagem motivadora e instigante para os alunos, deixando-os mais curiosos durante o processo de aquisição do conhecimento (Allevato, 2005; Spenassato e Giareta, 2009; Cardoso e Coutinho, 2010).

Sendo assim, reafirmamos, que esta ferramenta se mostrou de extrema relevância devido à aplicabilidade dos conceitos da análise combinatória em diversos contextos estatísticos. Essa aplicação promove o desenvolvimento do pensamento crítico dos indivíduos, auxiliando-os na tomada de decisões diante de múltiplas possibilidades. Dessa forma, as contribuições desse campo de estudo são notáveis, tanto teoricamente, ao permitir a construção dos conceitos sem a dependência excessiva de fórmulas, quanto na prática, ao oferecer uma ferramenta motivadora para a inovação no ambiente escolar.

Acerca de algumas limitações que os potenciais usuários (professores e alunos) podem enfrentar ao utilizar a ferramenta podem incluir: falta de

habilidade ou conhecimento prévio em relação à linguagem de programação utilizada na ferramenta; dificuldades em interpretar ou compreender as informações apresentadas na interface da ferramenta; e falta de motivação ou interesse em utilizar a ferramenta, especialmente se ela não for apresentada de forma atrativa e relevante para os alunos.

Além disso, é importante salientar que a ferramenta apresenta limitações teóricas, uma vez que não abrange todas as possibilidades teóricas da análise combinatória. Isso fica evidente ao considerarmos exemplos como a permutação circular ou problemas mais complexos que demandam múltiplas abordagens da análise combinatória para uma resolução abrangente.

Durante o experimento, enfrentamos alguns desafios, especialmente quando se tratou de utilizar o software R. Isso se deve, em parte, à falta de exposição dos alunos à estruturação de códigos e à linguagem de programação no contexto da Educação Básica. Entretanto, acreditamos que essa realidade esteja destinada a mudar em breve, à medida que a demanda por aprimoramento e estímulo das habilidades de lógica de programação se intensificar. Infelizmente, é importante ressaltar que nem todos os estudantes têm acesso fácil a computadores, e algumas instituições de ensino de nível básico ainda não possuem infraestrutura de informática adequada.

Por fim, a abordagem pedagógica adotada neste estudo teve como objetivo primordial tornar o ensino mais adequado às necessidades contemporâneas, buscando aproveitar os avanços tecnológicos para aprimorar a educação. Essa abordagem visa assegurar que o ensino esteja alinhado com os desafios em constante evolução, presentes no cenário educacional e na sociedade em geral. Nesse contexto, os resultados deste estudo contribuem, de maneira geral, para promover a reflexão sobre a importância de fomentar e desenvolver estratégias de ensino inovadoras e eficazes, com vistas ao futuro. Isso se dá por meio da identificação de tendências educacionais emergentes e da consideração de como a educação pode se adaptar às mudanças, incluindo a integração de tecnologia para melhorar a experiência em sala de aula, conforme explorado neste estudo.

É importante destacar que a proposta apresentada neste estudo representa um ponto de partida inicial, requerendo melhorias e ajustes para atender de forma mais eficaz às necessidades dos alunos, professores e ao ambiente escolar. Além disso, durante este estudo, foi possível identificar diversos aspectos que merecem atenção em futuras pesquisas. Um exemplo significativo é a necessidade de incluir uma introdução ao pensamento computacional e ao software R para os usuários da ferramenta, bem como a possibilidade de aprimorar a estrutura da ferramenta em si. É relevante ressaltar que estão em andamento esforços para desenvolver outras funções no software R, que não se limitarão apenas à identificação, mas também auxiliarão nos cálculos relacionados à análise combinatória.

Conclusão

As contribuições da ferramenta proposta se destacam tanto no aspecto teórico, ao permitir a construção dos conceitos sem a utilização excessiva de fórmulas, quanto na prática, ao fornecer um recurso motivacional para inovar no ambiente da sala de aula.

O desenvolvimento do raciocínio combinatório é considerado uma competência essencial para os estudantes em todos os níveis da Educação Básica, devido à sua ampla aplicabilidade na sociedade contemporânea, bem como à sua contribuição para a formação de cidadãos críticos e conscientes. A adoção de novas ferramentas e abordagens que visam aprimorar o raciocínio combinatório possui um impacto direto no processo de letramento estatístico e probabilístico, promovendo uma compreensão mais profunda desses conceitos fundamentais.

A presente ferramenta não se propõe a ser um recurso capaz de suprir todas as necessidades de aprendizagem dos alunos. Entretanto, foi concebida com o objetivo de oferecer uma ferramenta que possa orientar as ações educacionais, sendo passível de adaptação conforme a realidade de cada instituição de ensino. Por exemplo, é possível adaptar o programa criado por meio de atividades de computação desplugada.

A utilização da linguagem de programação demonstrou ser uma opção inovadora e facilitadora para os alunos que empregaram a função "acombi()" da árvore de tomada de decisão como uma ferramenta auxiliar na compreensão da seleção do método apropriado para a resolução de exercícios de análise combinatória e probabilidade. No entanto, constatou-se que uma parcela significativa dos participantes apresentou um déficit significativo no entendimento dos conceitos de análise combinatória, revelando uma discrepância em relação ao conteúdo programático esperado para o respectivo nível educacional. Portanto, em estudos futuros, pretende-se realizar um questionário prévio com o intuito de obter informações sobre o nível de conhecimento dos alunos em relação à temática em estudo, bem como para a descrição do perfil socioeconômico e histórico escolar dos participantes.

Há a intenção de realizar estudos adicionais que contemplem uma introdução prévia ao software R, visando um melhor aproveitamento dos programas desenvolvidos. Embora o software R seja uma ferramenta tecnológica com uma demanda em ascensão, muitos alunos ainda não a conhecem ou não estão familiarizados com sua utilização.

Foi observado que a utilização de ferramentas computacionais em ambiente educacional apresenta resultados altamente satisfatórios, o que motivou a realização de ajustes e aprimoramentos no programa desenvolvido.

Além disso, pretende-se estender o projeto para outras escolas da rede pública e privada em diferentes localidades, por meio de oficinas, com o objetivo de avaliar mais aprofundadamente o impacto da ferramenta proposta no cotidiano de alunos e professores. Dessa forma, busca-se contribuir para a consolidação de habilidades necessárias aos cidadãos que estão estabelecendo as bases para o seu letramento estatístico.

Portanto, a ferramenta proposta é de grande relevância devido à aplicabilidade dos conceitos da análise combinatória em diversos contextos da Estatística. A compreensão desses conceitos auxilia na construção do pensamento crítico dos indivíduos e na tomada de decisões diante de múltiplas possibilidades. As contribuições são evidentes, tanto teoricamente,

ao possibilitar a construção dos conceitos sem uma utilização demasiada de fórmulas, quanto na prática, ao fornecer uma ferramenta motivacional para inovar no ambiente de sala de aula.

Referências

- ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. *Resolução de Problemas. Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados: Análise de uma Experiência*. In: Revista Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 7, n. 2, p. 370, 2005.
- ARANÃO, I. V. D. *A Matemática através de brincadeiras e jogos*. 7. ed. Campinas, SP: Papyrus, 2011.
- BALL, D. L.; COHEN, D. *Reform by the Book: What Is - or Might Be - the Role of Curriculum Materials in Teacher Learning and Instructional Reform?* In: Educational Researcher, vol. 25, n. 9, p. 6-8, 1996. DOI: <https://doi.org/10.3102/0013189X025009006>
- BORBA, R. *Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização*. In: Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática, 13, 2013, Curitiba. Anais eletrônicos... Curitiba, 2013.
- BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais – Matemática: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental*. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais – Matemática: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental*. Brasília: MEC/SEF, 2000.
- BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais – Matemática: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental*. Brasília: MEC/SEF, 2017.
- BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais – Matemática: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental*. Brasília: MEC/SEF, 2018.
- CARDOSO, M.D.L; COUTINHO, C.P. *Ambientes de aprendizagem Web 2.0 no ensino profissional: um estudo sobre a utilização de uma ferramenta de colaboração online no módulo Estatística*, 2010.
- CARVALHO, P. C. P; MORGADO, A. C. O; FERNANDEZ, P; PITOMBEIRA, J. B. *Análise Combinatória e Probabilidade*. 10ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- FANTIN, M; RIVOTELLA, P. C. *Cultura digital e escola: pesquisa e formação de professores* (pp. 95-146). Campinas: Papyrus, 2012.
- FISCHBEIN, E. *The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity*. In: Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, p. 231-245, 1994.

GAL, I. *Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities*. In: *International Statistical Review*, Voorburg, v. 70, n. 1, p. 1-25, 2002.

GAL, I. *Towards 'probability literacy' for all citizens: building blocks and instructional dilemmas*. In: *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning*. Graham J. (ed.), Kluwer Academic Publishers, p. 43-70, 2005. DOI: https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3.

LOPES, C. E. *O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores*. Cadernos CEDES, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 189-201, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1590/S0101-32622008000100005>.

MELLO, H. *Desmistificando o Ensino de Análise Combinatória*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil. 2017.

MONARD, M. C; BARANAUSKAS, J. A. *Indução de regras e árvores de decisão*. In: *Sistemas Inteligentes - Fundamentos e Aplicações*, v. 1, p. 115-139, 2003.

R CORE TEAM. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Viena, Áustria, 2021. Disponível em: <https://www.R-project.org/>. Acesso em: 28 de setembro de 2023.

ROXO, E. et al. *Matemática 2º ciclo, 2ª série. 2ª ed.* Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1944.

RPUBS. *Utilização de uma ferramenta computacional para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem da análise combinatória*. Disponível em: <https://rpubs.com/acombi/1090144>. Acesso em: 2 out. 2023.

RSTUDIO, Inc. *RPubs: Publishing in the R Community*. Disponível em: <https://rpubs.com/>. Acesso em: 28 de setembro de 2023.

RSTUDIO TEAM. *RStudio: Integrated Development for R*. RStudio, PBC, Boston, MA, URL: <https://www.rstudio.com/>. Acesso em: 28 de setembro de 2023.

SPENASSATO, D; GIARETA, M. K. *Inclusão de alunos surdos no ensino regular: Investigação das propostas didático-metodológicas desenvolvidas por professores de matemática do ensino médio da EENAV*. In: X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 02 a 05 de junho. Ijuí/RS, 2009.

Recebido em junho de 2023.

Aprovado em setembro de 2023.