http://doi.org/10.14393/ER-v30a2023-39

A contribuição da Engenharia Didática como aporte metodológico para o ensino de Probabilidade

Cristimara Rodrigues de Castilho[1]
Heloisa Almeida de Figueiredo[2]
Chang Kuo Rodrigues[3]

RESUMO

Este artigo é parte de uma pesquisa realizada em uma escola da rede particular na cidade do Rio de Janeiro, com estudantes do sexto ano do ensino fundamental a partir da temática: experimentação por meio da probabilidade frequentista para verificação da probabilidade clássica. O objetivo desta pesquisa foi investigar as contribuições da abordagem metodológica qualitativa, subsidiada pela Engenharia Didática, para o ensino de probabilidade. Para tal, foi realizado com os estudantes, algumas experimentações, possibilitadas pelo uso de uma roleta tecnológica criada pelas autoras em um aplicativo que foi instalado nos celulares dos alunos previamente, que contava com espaços equiprováveis e não equiprováveis. Destaca-se que o trabalho com atividades experimentais que culminam a uma regularidade, pode trazer um movimento para a aprendizagem de probabilidades, além de manter o foco nas habilidades específicas da BNCC, potencializando o entendimento das ideias básicas de probabilidade, levando, assim, à compreensão que a abordagem metodológica qualitativa pode contribuir para o ensino desta temática.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática. Educação Estatística. Probabilidade. Engenharia Didática.

[1] Mestra em Educação Matemática. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, Brasil. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-7703-7675. *E-mail*: cristimaracastilho@hotmail.com.
[2] Mestra em Educação Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Niterói, RJ, Brasil. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-2430-7256. *E-mail*: heloisa-figueiredo@hotmail.com.
[3] Doutora em Educação Matemática. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, Brasil. Orcid: https://orcid.org/0000-0001-8716-6078. *E-mail*: changkuockr@gmail.com.

http://doi.org/10.14393/ER-v30a2023-39

The contribution of Didactic Engineering as a methodological contribution to the teaching of Probability

ABSTRACT
This article is part of a research carried out in a private school in the city of Rio de Janeiro, with students in the sixth year of elementary school based on the theme: experimentation through frequentist probability to verify the classic probability. The objective of this research was to investigate the contributions of the qualitative methodological approach, subsidized by Didactic Engineering, for teaching probability. To this end, some experiments were carried out with the students, made possible by the use of a technological roulette wheel created in an application for this study and installed on their cell phones, which had equiprobable and non-equiprobable spaces. It is noteworthy that working with experimental activities that culminate in regularity can bring about a movement towards learning probabilities, in addition to keeping the focus on the specific skills of the BNCC, enhancing the understanding of the basic ideas of probability, thus leading to the understanding that the qualitative methodological approach can contribute to the teaching of this theme.
KEYWORDS: Mathematics Education. Statistical Education. Probability. Didactic Engineering.

El aporte de la Ingeniería Didáctica como aporte metodológico a la enseñanza de la Probabilidad

RESUMEN
Este articulo hace parte de una investigación realizada en una escuela de la red particular en la ciudad de Rio de Janeiro, con estudiantes de sexto año de escuela primaria a partir de la temática: experimentación por medio de la probabilidad frecuentista para la verificación de la probabilidad clásica. El objetivo de esta investigación fue poner en claro las contribuciones del enfoque cualitativo usando la ingeniera didáctica, para la enseñanza de la probabilidad. En este sentido, fue realizado con los estudiantes, algunas experimentaciones, posibilitadas por el uso de una ruleta tecnológica creada con un aplicativo para este estudio e instalada en sus celulares que contaba con espacios equiprobables y no

http://doi.org/10.14393/ER-v30a2023-39

equiprobables. Se destaca que el trabajo con actividades experimentales que culminan con regularidad, logrando traer un movimiento para el aprendizaje de la probabilidad, además de eso, mantener el foco en las habilidades especificas de la BNCC, potencializando el entendimiento de las ideas básicas de probabilidad, llevando así, a la comprensión que el enfoque cualitativo puede contribuir para la enseñanza de esta temática.
PALABRAS CLAVE: Educación Matemática. Educación Estadística. Probabilidad. Ingeniería Didáctica.

* * *

Introdução

No campo da Educação Matemática, a pesquisa qualitativa vem se destacando e delineando possibilidades de investigação, principalmente no que diz respeito às pesquisas em sala de aula. Com o objetivo de analisar e enaltecer o percurso, ou o processo e não apenas sobre os resultados obtidos, esta metodologia de pesquisa vem sendo desdobrada em vários vieses como, por exemplo, pesquisa etnográfica, pesquisa-ação, estudo de casos, análises de discursos, narrativas, estudos de memórias, histórias de vida, entre outras (ANDRÉ, 2001). Na metodologia de pesquisa qualitativa, há uma análise densa do processo e dos resultados, que objetiva acrescentar discussões, resultados, possibilidades e até limitações, no conhecimento já existente.

Na pesquisa qualitativa, está presente a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões, levando em consideração as perspectivas e interpretações dos participantes. O significado que é atribuído a este método engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências (ARAÚJO; BORBA, 2006).

Desse modo, a Engenharia Didática é uma abordagem metodológica que está inserida no contexto da pesquisa qualitativa visto que foi caracterizada por Artigue (1988) como um esquema experimental baseado em realizações didáticas feitas em sala de aula.

http://doi.org/10.14393/ER-v30a2023-39

A escolha pela Engenheria Didática para desenvolvimento desta pesquisa se dá pelo entendimento de sua contribuição para a construção do conhecimento na área da Educação Matemática. Ou seja, ao escrever este artigo, em que foi utilizado esta metodologia de pesquisa, é esperado contribuir para a construção do conhecimento na área de Educação Matemática, fornecendo evidências sobre práticas pedagógicas e estratégias de ensino e de aprendizagem. Por isso, para elucidação de como esta metodologia funciona, descreveremos uma investigação que se debruçou sobre o tema da Educação Probabilística e utilizou Engenharia Didática como meio, ou método, para alcançar os resultados.

Com isso, seguiremos Almouloud (2007) e apresentaremos o processo experimental da Engenharia Didática que é composta de quatro fases, sendo elas: (i) Análises Preliminares; (ii) Construção e Análise *a priori*; (iii) Experimentação e, (iv) Análise *a posteriori* e Validação da Hipótese.

Nesse contexto, com objetivo de investigar as contribuições da abordagem metodológica qualitativa, subsidiada pela Engenharia Didática, para o ensino de probabilidade, desenvolveu-se duas atividades que buscaram unir as abordagens frequentista e clássica da probabilidade. Na primeira atividade, foi proposto um estudo em um espaço amostral equiprovável, enquanto na segunda atividade, foi explorado um espaço amostral não equiprovável.

Além do objetivo mencionado anteriormente, esta pesquisa é guiada por uma questão relacionada ao tema: quais são as possibilidades decorrentes da integração das abordagens clássica e frequentista no ensino de Probabilidade?

Para a apresentação desta pesquisa, dividiu-se a escrita desse artigo em seis seções, incluindo o presente texto introdutório. A seguir, nas análises preliminares da Engenharia Didática, apresenta-se uma explanação sobre o ensino de probabilidade, trazendo a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), suas indicações de objetivos do conhecimento para o sexto ano do ensino fundamental, escolaridade em que a pesquisa foi realizada e as

http://doi.org/10.14393/ER-v30a2023-39

habilidades esperadas no documento oficial. Discute-se pontos importantes sobre o ensino de probabilidade em espaços equiprováveis e não equiprováveis e sobre as abordagens clássica e frequentista da probabilidade, apontando para a importância de uma possível junção destas duas abordagens. Além disso, conceitualiza-se a pesquisa qualitativa subsidiada pela Engenhadia Didática em Educação Matemática.

Nas seções seguintes, descreve-se como a pesquisa se consolidou dentro de cada uma das quatro fases da metodologia adotada, desde as análises preliminares, passando pela segunda fase da engenharia didática, a construção e análise *a priori*, seguida da experimentação com os alunos em sala de aula, até a realização do confronto entre os resultados preditivos e aqueles obtidos de fato, isto é, na análise *a posteriori* e validação da hipótese, à luz da teoria discutida na seção sobre o ensino de probabilidade nas análises preliminares.

Aplicação da Engenharia Didática: Análises Preliminares

A implementação da Probabilidade e Estatística na escola básica começou a ser realizada em 1980 com a criação da *International Association for Statistical Education* (IASE) pelos Estados Unidos. O objetivo do IASE é a divulgação, implementação e consolidação da Educação Estatística nas escolas básicas. Atuando como um documento que norteia o ensino no Brasil, temos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) que, conversando com a indicação do IASE, aponta para o ensino de Probabilidade e Estatística.

A Educação Infantil, que engloba o período até os seis anos de idade, segundo a BNCC, não aponta qualquer trabalho relacionado aos campos da Probabilidade. Já no Ensino Fundamental - Anos Iniciais, organiza o currículo escolar em cinco unidades temáticas, sendo elas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística.

Nesta fase da Educação Básica, a Probabilidade deve ser trabalhada de modo a

> [...] promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Para isso, o início da proposta de trabalho com probabilidade está centrado no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis. (BRASIL, 2018, p. 274).

Este trecho da BNCC destaca a importância de promover a compressão sobre os fenômenos estatísticos, especialmente os fenômenos não determinísticos, de modo que as propostas de trabalho com esse tema possam explorar a noção de aleatoriedade, favorecendo assim, a compreensão fundamental de que eventos são incertos e variam de acordo com diferentes circunstâncias. Ao promover a diferenciação entre os tipos de eventos, esta abordagem desenvolve o pensamento crítico e a capacidade dos alunos de avaliar e estimar a probabilidade de ocorrência de eventos em diferentes contextos.

Para o Ensino Fundamental - Anos Finais, a BNCC (2018) orienta que o estudo de Probabilidade

> [...] deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista. (BRASIL, 2018, p. 274)

Desse modo, já se apresenta na BNCC (BRASIL, 2018) o confronto entre a probabilidade clássica e a probabilidade frequentista, que pode ser calculada pelo empirismo, ou ainda, com o uso de tecnologias para que se possa realizar um determinado evento em um número grande de vezes.

http://doi.org/10.14393/ER-v30a2023-39

Coutinho (2002) já apontava para um enfoque no ensino de Probabilidade pelo modo clássico juntamente com o frequentista, uma vez que

> [...] este enfoque permite a confrontação dos dois principais pontos de vista quando definimos uma probabilidade: o ponto de vista clássico ou laplaciano e o ponto de vista frequentista. Nestas condições, a construção do conceito pelo aluno é feita de forma a que ele tenha menos possibilidades de mobilizá-los fora do seu domínio de validade, ou seja, com menos possibilidades de que este conceito torne-se um obstáculo para aprendizados futuros no domínio do Cálculo de Probabilidades. (COUTINHO, 2002, p.9).

De acordo com o trecho, ao explorar ambos os pontos de vista, a construção do conceito de probabilidade busca garantir que os alunos tenham menos chances de generalizá-lo de maneira inadequada ou aplicá-lo além de seu domínio de validade. Isso significa que abordar atividades com esse enfoque pode favorecer a compreensão das condições em que esses conceitos probabilísticos são aplicáveis.

A BNCC no tema Probabilidade no Ensino Fundamental – 6º ano aponta dois objetos de conhecimento (conteúdos e conceitos), são eles:

> Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável.
> Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista) (BRASIL, 2018, p. 304).

Além disso, a BNCC também apresenta uma habilidade (conhecimentos necessários para o pleno desenvolvimento das competências) para probabilidade no sexto ano, sendo ela:

http://doi.org/10.14393/ER-v30a2023-39

> Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos (BRASIL, 2018, p. 305).

Seguindo nesta direção, optou-se por abordar tanto a probabilidade clássica quanto a probabilidade frequentista com os alunos. Essa decisão foi motivada pela relevância de permitir aos estudantes reconhecer que os espaços amostrais nem sempre apresentam igual probabilidade para cada evento.

Para definição de probabilidade, trabalhou-se com os alunos a Probabilidade Clássica, que pode ser calculada pelo modo clássico, definido por Laplace:

> Suponha que os experimentos aleatórios têm as seguintes características:
> a) Há um número finito (digamos n) de eventos elementares (casos possíveis). A união de todos os eventos elementares é o espaço amostral Ω.
> b) Os eventos elementares são igualmente prováveis.
> c) Todo evento A é uma união de m eventos elementares onde m ≤ n.
> Definimos então:
> $$\text{Probabilidade de A} = P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{\#\,(A)}{\#\,(\Omega)} = \frac{m}{n}.$$
> (MORGADO et al, 1991, p. 64)

Esta definição de probabilidade supõe que todos os eventos são equiprováveis, ou seja, todos possuem a mesma chance de ocorrência. Como alguns eventos não podem ser repetidos em mesmas condições, vemos que apenas a probabilidade clássica não dá conta de quantificar todas as situações probabilísticas, além de existirem diversos experimentos inseridos no contexto cultural dos alunos que não possuem a mesma chance de ocorrência e que podem ser trazidos para a sala de aula como forma de incentivo pelo professor para que os próprios alunos possam exemplificar a probabilidade em seu cotidiano.

Coutinho (1996) se preocupa quanto aos alunos serem expostos somente à probabilidade clássica, uma vez que eles podem construir uma ideia falsa de que a probabilidade é sempre calculada em espaços equiprováveis. Diante disso, foi levantada a hipótese para este trabalho de que a combinação das abordagens clássica e frequentista pode potencializar a aprendizagem das ideias fundamentais de probabilidades.

Dessa forma, ao realizar eventos repetidas vezes pode levar os alunos a verificarem a variabilidade, a aleatoriedade, a incerteza e, ainda, estimarem uma probabilidade de ocorrência de certo evento, usando o modo frequentista. Pode-se definir o cálculo de probabilidade pelo modo frequentista como:

> A definição frequentista baseia-se na frequência relativa de um número grande de realizações do experimento. Mais especificamente, definimos a probabilidade P(A) de um evento A usando o limite da frequência relativa da ocorrência de A em n repetições independentes do experimento, com n tendendo ao infinito, ou seja, P(A) = $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ x (número de ocorrências de A em n realizações independentes do experimento) (NETO, 2016, p. 23).

Assim, a probabilidade de um evento é verificada por meio de repetições sifnificativas desse evento e, com os resultados obtidos, pode-se estimar um valor que descreva sua possibilidade de ocorrência, não sendo, nesta abordagem, usado apenas o espaço equiprovável para os cálculos. Como o uso dessa abordagem necessita de um número de experimentos grande, as pesquisas indicam a importância do uso da informática como ferramenta para simulação dos experimentos, podendo assim, alcançar de forma favorável uma estimativa da probabilidade procurada (BITTAR; ABE, 2013).

http://doi.org/10.14393/ER-v30a2023-39

Além da relevância da probabilidade que foi destacada pela BNCC, é importante ressaltar as ideias publicadas por Gal (2005). Segundo o autor, a aleatoriedade, a previsibilidade e o cálculo de probabilidades são elementos essenciais do conhecimento de uma pessoa letrada probabilisticamente. Além disso, o autor também destaca a importância da linguagem utilizada para se comunicar sobre o acaso, o contexto em que as questões estão inseridas e a importância da reflexão sobre os resultados obtidos.

Para realizar a pesquisa proposta neste trabalho e descrita até então, será feita a análise qualitativa das informações, já que *"a fonte direta de dados foi o ambiente natural, constituindo o investigador como o instrumento principal"* (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 47), e está interessado no contexto em que o problema de pesquisa está sendo investigado. Neste caso, a sala de aula do sexto ano de uma escola particular na cidade do Rio de Janeiro é o ambiente em que foi realizada a pesquisa e, também onde uma das autoras atua como professora regente nas aulas de Matemática.

A opção pela metodologia qualitativa para o desenvolvimento desta pesquisa é reiterada quando os pesquisadores analisam o desempenho de cada participante, pois o foco principal deste trabalho está nos processos que serão realizados pelos alunos para que se chegue aos resultados (BOGDAN; BIKLEN, 1994) e não apenas no resultado em sí.

Por isso, vale ressaltar que a análise do processo de cada atividade é muito importante, tendo em vista que esta característica distingue a pesquisa qualitativa de outras. Assim, entende-se que:

> [...] os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador. O processo de condução de investigação qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos, dados estes a serem abordados por aqueles de forma neutra. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 51)

http://doi.org/10.14393/ER-v30a2023-39

Os aspectos observados pelos autores (BOGDAN; BIKLEN, 1994) e que foram destacados nesta pesquisa, evidenciam que a utilização da Engenharia Didática possibilita a compreensão das perspectivas e experiências dos alunos, buscando uma compreensão contextualizada do assunto. Para tanto, utilizou-se de atividades que envolvessemm um diálogo ativo e interações sugnificativas.

Vale ainda destacar que os pressupostos teóricos da Engenharia Didática, segundo Artigue (1988), sustentam um esquema experimental baseado nas "realizações didáticas" na sala de aula, ou seja, sobre concepção (ou construção), realização, observação e análise de sequências de ensino.

Segundo Pais (2002), a Engenharia Didática tem como objeto de estudo a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos. Essa tendência visa compreender as condições de produção, registro e comunicação do conteúdo escolar da matemática e de suas consequências didáticas, além de estabelecer conexões entre teoria e prática.

Para a implementação da metodologia da Engenharia Didática é necessário que o pesquisador siga as quatro fases que foram apresentadas anteriormente e que serão detalhadas a seguir.

Para Machado (2002), as análises preliminares são feitas principalmente para dar embasamento à concepção da metodologia de pesquisa da Engenharia Didática, elas são retomadas e aprofundadas durante todo o transcorrer do trabalho. Nestes termos, Almouloud (2007) afirma que um dos objetivos das análises preliminares é identificar os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo, além de delinear de modo fundamentado as questões, as hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa.

Ainda para Almouloud (2007), a segunda fase da Engenharia Didática, da construção e análise *a priori*, comporta uma parte de descrição e outra de previsão. A finalidade dessa fase é elaborar e analisar no sentido preditivo uma sequência didática para responder às questões e validar as hipóteses levantadas na fase anterior.

Na fase seguinte, a experimentação, Machado (2002) afirma que é a fase da realização da Engenharia Didática com uma certa população de alunos. Esse é o momento de colocar em funcionamento tudo que foi construído durante as outras fases.

Esta fase é seguida da análise *a posteriori* e validação que se apoia nos dados recolhidos na fase da experimentação. Almouloud (2007) afirma que esta fase é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos sobre o tema em questão.

A confrontação das análises *a priori* e *a posteriori* que se validam ou se refutam é a última fase da pesquisa, bem como a validação da hipótese inicialmente levantada. O objetivo é relacionar as observações com os objetivos definidos *a priori* e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos encontrados (AMOULOUD, 2007).

Aplicação da Engenharia Didática: Construção e Análises a *priori*

Buscando atingir o objetivo desta pesquisa, foram aplicadas duas atividades compostas por cinco tarefas cada uma, que buscaram relacionar o cálculo de probabilidade clássica com a estimativa dada na abordagem frequentista, analisando dois espaços amostrais, sendo um equiprovável e outro não equiprovável.

Ao desenvolver as atividades propostas, levou-se em consideração a compreensão de que as crianças e muitos adultos têm frequentemente dificuldade em pensar racionalmente e quantificar a probabilidade, ainda que entenda a importância da aleatoriedade e da probabilidade em nossas vidas (BRYANT; NUNES, 2012). Além disso, levando em conta o contexto dos alunos (GAL, 2005), utilizou-se os times da cidade do Rio de Janeiro, sobre os quais, os alunos poderiam ter conhecimentos prévios.

http://doi.org/10.14393/ER-v30a2023-39

Para tanto, é importante se basear em quatro aspectos diferentes sobre acontecimentos e da sequência em que estes ocorrem, são eles: compreender a aleatoriedade, trabalhar o espaço amostral, comparar e quantificar as probabilidades e compreender as relações entre eventos (BRYANT; NUNES, 2012).

Entende-se que atividade e tarefa são noções que educadores matemáticos consideram constituir categorias didáticas básicas. Uma atividade pode incluir a execução de numerosas tarefas. Mais importante, a atividade, diz respeito ao aluno e refere-se àquilo que ele faz em um dado contexto. Já a tarefa, representa apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra (PONTE, 2014).

Na atividade que propunha um trabalho em um espaço amostral equiprovável, buscou-se desenvolver o cálculo por meio da probabilidade laplaciana e estimar por meio de sucessivas tentativas com o uso de uma roleta previamente construída pelas autoras e disponível por um *link*, para ser acessada pelo celular de um representante do grupo de alunos.

Para utilização da roleta com as alternativas, “merece destaque o uso de tecnologias” (BRASIL, 2018, p. 270), uma vez que torna aplicável um número suficientemente grande de vezes que a experiência é realizada, sem ser maçante para o aluno.

Assim como apontado pela BNCC (BRASIL, 2018), entende-se que:

> O estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica e a probabilidade frequentista (BRASIL, 2018, p. 270).

Nesses termos, a natureza preditiva desta fase incide sobre a habilidade dos alunos em calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

Na participação da pesquisa, estavam presentes oito alunos do sexto ano do ensino fundamental, de uma escola particular do estado do Rio de Janeiro. Nesta escola, a Matemática é responsável, na rotina escolar dos alunos, por cinco tempos semanais de cinquenta minutos cada. Os conteúdos das aulas são estabelecidos pelo material didático adotado pela escola, em conformidade com a BNCC.

No momento da aplicação desta atividade, passávamos pelo processo de retorno ao ensino presencial, devido à paralisação das aulas presenciais em 2020, por conta da pandemia da COVID-19. Neste contexto, ressaltamos que no ano de 2020 "ficamos com pouco ensino, pouca aprendizagem, pouco conteúdo, pouca carga horária, pouco diálogo. Em contrapartida, temos muitas tarefas" (SAVIANI; GALVÃO, 2021, p. 42).

Nesse contexto, embora os alunos, em sua maioria, soubessem calcular a probabilidade clássica, como a razão entre eventos favoráveis e eventos possíveis, verificou-se uma fragilidade na conceitualização do caráter aleatório da probabilidade, bem como uma indistinção de espaços equiprováveis e não equiprováveis.

A primeira atividade, apresentada a seguir, buscou trabalhar com o espaço equiprovável e, além das perguntas listadas, mostrava ao aluno uma reoleta com os quatro times do Rio de Janeiro (Vasco, Flamengo, Fluminense e Botafogo) – todos com a mesma área na roleta, ou seja, representando seu espaço equiprovável.

http://doi.org/10.14393/ER-v30a2023-39

Quadro 1: atividade no espaço equiprovável

Atividade 1 Considere o experimento aleatório: girar a roleta e verificar em qual time o ponteiro para. a) Qual é o espaço amostral? b) Todos os times têm a mesma chance de sair? Por quê? c) O espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável? Por quê? d) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar no time do Flamengo? (Lembre-se de como calculávamos probabilidade) e) Rode a roleta 100 vezes. Se você fizer a razão "saiu time do Flamengo" dividido pelo "total de vezes que rodou a roleta", qual será o resultado encontrado? O valor encontrado é o mesmo (ou parecido) com o que você calculou no item anterior? Como podemos explicar esses resultados?

Fonte: criado pelas autoras

Já a segunda atividade, buscou trabalhar com o espaço não equiprovável. Agora, a roleta representava as porcentagens das quantidades dos torcedores dos times do Rio e, com isso, a área para os quatro times do Rio de Janeiro é diferente, visto que a torcida do Flamengo é a maior dentre as torcidas dos times do Rio de Janeiro.

Quadro 2: atividade no espaço não equiprovável

Atividade 2 a) Qual é o espaço amostral? b) Todas as torcidas têm a mesma chance de sair? Por quê? c) O espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável? Por quê? d) Qual é a probabilidade de o ponteiro parar na torcida do Flamengo? e) Rode a roleta 100 vezes. Se você fizer a razão "saiu torcida do Flamengo" dividido pelo "total de vezes que rodou a roleta", qual será o resultado encontrado? O valor encontrado é o mesmo (ou parecido) com o que você calculou no item anterior? Como podemos explicar esses resultados?

Fonte: criado pelas autoras

A seguir, apresentam-se todas as intenções e possíveis respostas às atividades previamente discutidas pelas autoras. Essa descrição prévia das respostas está prevista na etapa de análise *a priori* da Engenharia Didática. Posteriormente, confrontaremos as expectativas descritas aqui com os resultados obtidos durante a fase de experimentação.

Na tarefa 1 da atividade 1, esperava-se que os alunos pudessem perceber que o espaço amostral eram os quatro times: Flamengo, Botafogo, Vasco e Fluminense. Esperava também que eles pudessem responder 100% nesta tarefa. Na tarefa 2, os alunos deveriam perceber que as chances de sair qualquer um dos times eram iguais, uma vez que cada um deles ocupava ¼ no espaço amostral, ou ainda, que possuíam o mesmo "tamanho" na roleta.

Na tarefa 3, quando se perguntava sobre a equiprobabilidade do espaço amostral, a resposta considerada como correta, seria sim, embora não esperássemos que os alunos se lembrassem desse conceito, já que foi colocado na tarefa justamente com o objetivo de trazer para a discussão.

A tarefa 4 foi elaborada para que os alunos pudessem usar o cálculo da probabilidade como a razão entre o evento favorável (o ponteiro parar sobre o time do Flamengo) e eventos possíveis. E se esperava que assim eles fizessem, pois esse conceito já fora trabalhado em sala de aula e, por esse motivo, colocamos um lembrete no enunciado da tarefa.

Por fim, na tarefa 5 da primeira atividade, pedimos aos alunos que rodassem a roleta pelo celular, apenas com um toque, 100 vezes, para que eles percebessem que a estimativa poderia variar com relação ao cálculo da probabilidade realizado na tarefa anterior, e que viesse à tona a ideia de quanto mais aumentarmos a frequência do experimento, mais próximo ficaria a estimativa da probabilidade clássica.

Na atividade 2, as tarefas se assemelharam com a as tarefas da atividade 1, tanto em elaboração quanto em objetivo, a diferença é que

http://doi.org/10.14393/ER-v30a2023-39

esperávamos que os alunos pudessem perceber que não se tratava de um espaço equiprovável, onde todos os eventos possuíam a mesma chance.

A seguir, é narrado como se deu a experimentação, com os oito alunos presentes.

Aplicação da Engenharia Didática: Experimentação

Como o tema Probabilidade já havia sido trabalhado de forma teórica, em sala de aula, com o material didático utilizado pela professora e recomendado pela escola, foram definidas que as tarefas tivessem o uso da tecnologia para o cálculo de probabilidade e, em seguida, comparasse esse cálculo com o resultado obtido por meio de experimentos sucessivos.

A turma de oito alunos foi dividida em dois grupos de quatro alunos cada. Cada grupo recebeu duas folhas impressas: uma com a atividade em que o espaço amostral era equiprovável (atividade 1) e outra com a atividade em que o espaço amostral não era equiprovável (atividade 2).

A fim de estudar os resultados, chamaremos de grupo 1 o grupo formado pelos estudantes: Maria, Ana, Joana e André. E o grupo 2 composto por Edmundo, Sarah, Jaqueline e Denis.

A tarefa 1 de ambas as atividades perguntava aos alunos qual era o espaço amostral. Na roleta dos Times do Rio, os dois grupos responderam “um círculo”. Na roleta das Torcidas dos Times do Rio, o grupo 1 respondeu “um círculo” e grupo 2 respondeu “Não, pois são sobre a porcentagem das torcidas”.

A segunda tarefa da atividade 1 na roleta dos times do Rio perguntava se, girando a roleta, todos os times teriam a mesma chance de sair e o por quê disso. O grupo 1 respondeu: “porque são times diferentes, mas com chances iguais”; e o grupo 2 respondeu “Sim, pois todos tem a mesma forma e área igual”.

Na segunda tarefa da atividade 2, na roleta das Torcidas dos Times do Rio, a pergunta foi em relação à possibilidade de todas as torcidas terem a mesma chance de sair. O grupo 1 respondeu: “se for na roleta aleatoriamente todos tem a mesma quantidade, mas se for com base na porcentagem da torcida eles não teriam a mesma chance". O grupo 2 respondeu: "Não, pois as áreas são diferentes".

A terceira tarefa de ambas as atividades, 1 e 2, perguntava se o espaço amostral era equiprovável ou não equiprovável e por quê. Para ambas as roletas, o grupo 1 deixou esta atividade em branco. O grupo 2 respondeu para roleta dos Times do Rio, na atividade 1, que "o espaço é equiprovável porque tem a mesma chance de sair" e, na roleta das Torcidas dos Times do Rio, na atividade 2, o grupo 2 respondeu: "Sim, porque tem o mesmo espaço".

A quarta tarefa solicitava que os alunos calculassem a probabilidade de o ponteiro parar na torcida do Flamengo, para a roleta das Torcidas dos Times do Rio e na roleta dos Times do Rio, a solicitação foi que calculassem a probabilidade de o ponteiro parar no time do Flamengo. Para esta tarefa, o grupo 2 respondeu 25% nas duas roletas, nas atividades 1 e 2. Já o grupo 1 respondeu para roleta dos Times do Rio: "25% porque nenhum time se repete e porque quantidades iguais de cada uma, possuindo 4 times poderíamos fazer 25 + 25 + 25 + 25 = 100 ou 25 dividido por 100 é igual a 4" e na roleta para as Torcidas dos Times do Rio, o grupo 1 respondeu: "com base aleatoriamente na roleta seria 20% de chance".

A última tarefa propôs que os alunos utilizassem cada uma das roletas que foram apresentadas pela professora por dois *links*, respectivos e acessada por um integrante de cada grupo. Este integrante foi responsável por girar cada uma das roletas, uma para cada atividade através de um toque na tela do celular.

O grupo 1 girou a roleta 100 vezes e o ponteiro parou 23 vezes no time do Flamengo. Para a resposta que foi dada, o grupo escreveu: "resultado parecido, já que giramos aleatoriamente e caiu 23 vezes, sendo assim faltava apenas dois".

O grupo 2 girou a roleta também por 100 vezes e o ponteiro parou 19 vezes no time do Flamengo. O grupo respondeu "Parecido. É uma probabilidade, nem sempre vai cair igual".

http://doi.org/10.14393/ER-v30a2023-39

O grupo 1 girou a roleta 100 vezes e destas, 23 vezes pararam na torcida do Flamengo. Eles responderam: “23%. Parecido, pois teve 3% de diferença”.

Já o grupo 2 respondeu: “Parecido (23)/100 é uma possibilidade nem sempre vai cair igual”.

Ao fim da aula, a professora recolheu as folhas impressas em que os grupos registraram as respostas que foram transcritas no decorrer desta seção.

Aplicação da Engenharia Didática: Análise *a posteriori* e validação

Nesta seção, com os dados procedentes da experimentação, será feito o confronto com as concepções e análises *a priori*.

O grupo 1, formado pelos alunos Maria, Ana, Joana e André, respondeu na tarefa 1 das atividades 1 e 2, que o espaço amostral era um círculo. De fato, a roleta apresentada aos alunos é um círculo, principalmente quando pensamos que o espaço amostral reúne todas as possibilidades de onde o ponteiro pode parar e, assim, a área do círculo representa o espaço amostral, o que foi logo discutido com os alunos pela professora. A resposta preditiva seria de 100%, ou ainda listassem os nomes dos times ou das torcidas, mas a resposta deles é de todo modo surpreendente e confronta diretamente com as discussões *a priori* realizadas, mostrando como a sala de aula é dinâmica, é um movimento constante e, o mais importante, é local de produção de conhecimento (GIRALDO, 2019).

O grupo 2, formado pelos alunos Edmundo, Sarah, Jaqueline e Denis, usou o mesmo raciocínio que o grupo 1 na tarefa 1 da primeira atividade. Mas na segunda, quando tratou das torcidas dos times do Rio, como deixamos a porcentagem de cada torcida, o grupo respondeu que não se tratava de um espaço amostral, uma vez que era uma roleta sobre as porcentagens da torcida.

Percebe-se, pela resposta dada pelo grupo, que os alunos deste grupo não possuem conceitualização formada sobre a definição do espaço amostral, o que nos causa preocupação, uma vez que os alunos já sabem usar a probabilidade clássica para os cálculos, ou seja, atuam em um espaço amostral equiprovável, mas não sabem o que venha a ser o espaço amostral.

Neste ponto é crucial frisar a importância da conceitualização. E, nesta resposta do grupo, fica claro que saber fazer o cálculo de uma probabilidade por meio da razão entre eventos favoráveis e eventos possíveis, não configura um aluno com entendimento do que de fato sejam esses eventos e as implicações do cálculo realizado, tal como afirma Gal (2005), quando discute sobre o ensino de probabilidade.

Na tarefa 2 da atividade 1, o grupo 1 respondeu em consonância com a resposta preditiva, respondendo que sim, todos os times têm a mesma chance de sair. Já o grupo 2, além de ressaltar que os times têm a mesma chance de sair, ao rodar a roleta, o grupo justificou que tal afirmação com a utilização da área, apontando para a igualdade das áreas ocupadas pelos quatro times na roleta. Essa reposta aponta mais uma vez para a junção da probabilidade geométrica, com o ensino de probabilidade, pois fica claro para o grupo, visualmente por meio da roleta, a igualdade de chances como a igualdade das áreas.

Na tarefa 2 da segunda atividade, o grupo 1, que antes utilizou a igualdade de chances por meio da porcentagem, agora justifica sua resposta com o cálculo da área, pois como as áreas não são iguais, sendo a torcida do Flamengo a com maior probabilidade de ser escolhida, justamente, por ocupar uma área maior. Esta observação também poderia ser feita pela porcentagem que foi colocada juntamente com o nome da torcida, sendo todas diferentes entre si.

Já o grupo 2, nesta mesma tarefa, traz um conhecimento de contexto para essa atividade, apontando que a resposta seria uma na roleta, mas se fosse considerar a torcida real, poderia ser outra. Esta resposta é importante, pois mostra como os alunos têm conhecimento a ser apresentado e dialogado com os conhecimentos vistos na escola, apontando a probabilidade como uma possibilidade de leitura do mundo (FREIRE, 1996), e não apenas mais um conteúdo de um currículo ou de uma apostila lotada.

Embora a pergunta da tarefa 3 em ambas as atividades fosse a mesma, sobre a equiprobabilidade do espaço, o grupo 1 deixou esta tarefa na primeira atividade em branco, enquanto na segunda respondeu ser um espaço equiprovável (conversando com sua tarefa anterior, onde respondeu ter chances iguais) e o grupo 2 fez o inverso, respondeu corretamente na atividade 1, sobre ser um espaço equiprovável e na segunda atividade, deixou em branco. A professora deixou essa possibilidade para os grupos, da entrega em branco de alguma tarefa, caso o grupo decidisse em conjunto que não saberia responder, para fins de análise na pesquisa. Desse modo, fica claro e se mostra ainda atual, citado já neste texto, quando Coutinho (1996) aponta para a não conceitualização da equiprobabilidade, levando os alunos a pensarem sempre estar atuando em espaços equiprováveis.

Na tarefa 4, de ambas as atividades, esperava-se que os alunos calculassem a probabilidade por meio da probabilidade clássica, o que foi diretamente respondido por eles, sem muita dificuldade. Dessa forma, aponta-se que um dos objetivos das atividades fora cumprido.

Já na tarefa 5, de ambas as atividades, buscou-se trabalhar com a estimativa da probabilidade frequentista. Aponta-se para a importância desse trabalho, pois os alunos puderam discutir enquanto usavam a tecnologia do celular, para repetir o experimento em cada atividade por 100 vezes. Nesse caminho, como descrito na seção anterior, ao fazer a comparação, os alunos puderam perceber que se trata de uma aproximação ao cálculo laplaciano, o que dialoga com o segundo objetivo da realização das atividades e com a referência apresentada na segunda seção deste trabalho.

http://doi.org/10.14393/ER-v30a2023-39

Conclusão

Este artigo contemplou o objetivo de investigar as contribuições de uma abordagem metodológica qualitativa para o ensino de probabilidade à luz da Engenharia Didática, verificando quais as potencialidades podem ser extraídas a partir da combinação das abordagens clássica e frequentista em uma turma do sexto ano do ensino fundamental.

Seguindo os pressupostos teóricos da Engenharia Didática em consonância com suas fases, a pesquisa se consolidou sobre o ensino de probabilidade em espaços equiprováveis e não equiprováveis e sobre as abordagens clássica e frequentista da probabilidade, sob as recomendações da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018).

A natureza qualitativa da pesquisa foi fundamental para que houvesse a análise das respostas escritas obtidas pelos alunos e não apenas de números que são encontrados após a utilização das fórmulas.

Além disso, a Engenharia Didática desempenhou um papel fundamental nesta pesquisa, permitindo o registro dos estudos realizados sobre a sequência didática e sua validação, tal como proposto por Machado (2002).

Esta validação é um ponto importante nas pesquisas que utilizam a Engenharia Didática e o que difere esta vertente da metodologia qualitativa de outras. A validação é interna, ou seja, a comparação acontece no mesmo grupo, com os resultados esperados e os resultados obtidos, diferente do que acontece nas pesquisas que utilizam a validação externa. É importante notar que esse processo de validação se instaurou em nosso trabalho desde a fase de concepção e análise *a priori*.

Com isso, o objetivo de investigar as contribuições uma abordagem metodológica qualitativa para o ensino de probabilidade à luz da Engenharia Didática, foi atigindo, uma vez que pode-se descrever as circunstâncias envolvidas na produção, registro e comunicação dos conteúdos escolares de matemática, bem como suas implicações didáticas, ao estabelecer conexões entre teoria e prática.

Referências

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da Didática da matemática.* Curitiba: UFPR, 2007.

ANDRÉ, M. *Pesquisa em educação:* buscando rigor e qualidade. Cadernos de pesquisa, p. 51-64, 2001.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. de C. *Pesquisa qualitativa em educação matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ARTIGUE, M. Ingènierie Didactique. *Recherches em Didactique dês athématiques*, Grenoble, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

BITTAR, M.; ABE, S. T. Ensino de Probabilidades: a Articulação entre as visões clássica, frequentista e geométrica. In: COUTINHO, C. de Q. S. (org.) *Discussões sobre o ensino e a aprendizagem da probabilidade e da estatística na escola básica.* Campinas, SP: Mercado das Letras, 2013. p. 99-120. (Coleção Educação Estatística).

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018..

BRYANT, P.; NUNES, T. *Children's understanding of probability: a literature review*. Nuffield Foundation. 2012.

BÔAS, S. G. V.; KONTI, K. C. Base Nacional Comum Curricular: um olhar para Estatística e Probabilidade nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Ensino em Re-Vista,* 25(4), 2018, 984-1003. DOI: https://doi.org/10.14393/ER-v25n3e2018-8.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação qualitativa em educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto editora, 1994.

COUTINHO, C. de Q. *Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista*: Estudo Epistemológico e Didático. São Paulo: EDUC, 1996.

COUTINHO, C. de Q. Probabilidade Geométrica: Um contexto para a modelização e a simulação em situações aleatórias com Cabri. Caxambu. MG. *Anais...* ANPED, 2002, GT19.

COUTINHO, C. de Q. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? *REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática* – UFSC, Florianópolis, v. 2, n.1, p.50-67, 2007. DOI: https://doi.org/10.5007/%25x.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia*: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 2005. (Coleção leitura)

GAL, I. Towards “probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. *In: Exploring probability in school. Springer*, Boston, MA, 2005. p. 39-63.

LOPES, C. E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Cadernos Cedes*, 28(74), 57-73, 2008.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). *Educação Matemática:* Uma introdução. 2 ed. São Paulo: Educ, 2002. p. 197-208

NETO, J. *Cálculo de* Probabilidades I, Juiz de Fora: UFJF, 2016.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. (Org.). *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática.* 1 ed. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Junho de 2014.

PONTES, M. M; LIMA, D. S. S. M; VASCONCELOS, F. V; VASCONCELOS, A. K. P. A temática ‘Probabilidade e Estatística’ nos anos iniciais do Ensino Fundamental a partir da promulgação da BNCC: percepções pedagógicas. *Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico (EDUCITEC*), v. 5, n. 12, 2019.

SAVIANI, D.; GALVÃO, A. C. *Educação na Pandemia*: a falácia do ensino remoto. Universidade e Sociedade ANDES-SN, ano XXXI, janeiro, 2021.

SILVA I. A. *Probabilidades:* a visão laplaciana e a visão frequentista na introdução do conceito. 2002. 174 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

Recebido em junho de 2023.

Aprovado em setembro de 2023.