Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad[1]

María Burgos[2]
Pablo Beltrán-Pellicer[3]
Belén Giacomone[2]
Juan D. Godino[2]

Resumen

En este trabajo se describe el diseño e implementación de una acción formativa con estudiantes de un máster de profesorado de Educación Secundaria en España sobre el tema de proporcionalidad. El objetivo principal de la experiencia es explorar sus conocimientos iniciales y evaluar el grado de desarrollo de aspectos relevantes de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de dicho contenido, en particular, el reconocimiento de niveles de algebrización involucrados en distintas soluciones a problemas de proporcionalidad. En la experiencia han participado 33 estudiantes con titulaciones de grado diversas y se ha realizado en el marco de la asignatura de Iniciación a la Innovación Docente e Investigación en Educación Matemática. Entre los resultados obtenidos destacamos las limitaciones en la competencia de análisis epistémico lograda, en particular, la identificación de proposiciones y procedimientos y sus correspondientes argumentaciones. En algunos casos, los estudiantes han mostrado carencias en el conocimiento común del contenido, el cual sirve de base para el conocimiento didáctico-matemático de este. Se concluye que la mejora de los resultados requiere, entre otras acciones, incrementar el tiempo asignado a la intervención formativa, lo cual permitirá incrementar el número y variedad de situaciones-problema planteadas, su solución y discusión.

Palabras claves

Proporcionalidad - Formación de profesores - Enfoque ontosemiótico - Niveles de algebrización - Análisis epistémico.

1- Investigación realizada como parte del proyecto de investigación, EDU2016-74848-P (FEDER, AEI), con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España) y del proyecto S119-Investigación en Educación Matemática, financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo.

2- Universidad de Granada; Granada, España. Contactos: mariaburgos@ugr.es; belen.giacomone@gmail.com; jgodino@ugr.es
3- Universidad de Zaragoza; Zaragoza, España. Contacto: pbeltran@unizar.es

DOI: http://dx.doi.org/10.1590/S1678-4634201844182013

Prospective mathematics teachers' knowledge and competence analysing proportionality tasks[4]*

Abstract

This paper describes the design and implementation of a training process about proportional reasoning with students of a Master's Degree in Secondary Education in Spain. The main objective of the experiment is to explore their initial knowledge and to evaluate how competent the participants on analysing relevant aspects of the epistemic facet of the didactic-mathematical knowledge, which are concretized in the recognition of algebrization levels through different solutions to proportionality problems, are. The participants in the experience have been 33 students, with diverse background education profiles, of the course Initiation to the Teaching Innovation and Investigation in Mathematics Education. Among the results, we highlight the students' limitations and difficulties to identify propositions and procedures and their related arguments. Likewise, the assignment of algebrization levels has also been a complex and difficult task for the participants. Besides, some students have shown deficiencies in the common knowledge of proportionality, which serves as a basis for the didactic-mathematical knowledge of the content. It is concluded that an improvement of the results requires, among other actions, to increase the time allocated to the formative intervention, which will allow extending the number and variety of situations-problems posed, their solutions and discussions.

Keywords

Proportionality - Teacher's education - Onto-semiotic approach - Algebrization levels - Epistemic analysis.

Introducción

El estudio de las razones, las proporciones y la proporcionalidad es un tema importante en el currículo escolar que se inicia en Educación Primaria y se continúa en Secundaria, siendo transversal a diferentes materias: Matemáticas y Educación Artística en Educación Primaria, Matemáticas, Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas o aplicadas, Física y Química, Biología, Dibujo Técnico, Educación Plástica, Visual y Audiovisual, Dibujo Artístico, Volumen y Fundamentos de Arte en Educación Secundaria (WILHELMI, 2017).

La proporcionalidad se puede abordar desde diferentes puntos de vista o significados, dependiendo de los contextos de aplicación (vida cotidiana, científico-técnico, artístico,

4 - Research carried out as part of the research project EDU2016-74848-P (FEDER, AEI), FQM-126 Research Group (Junta de Andalucía, Spain) and Project S119-Research in Mathematics Education, financed by the Government of Aragon and the European Social Fund.

***** Translation by Angela Helen Barnie. Contact: angela.helen@gmail.com geométrico, probabilístico, estadístico, etc.), lo que conlleva la participación de objetos y procesos específicos de dichos campos en las prácticas de resolución de los problemas correspondientes. Como indican Obando, Vasco y Arboleda (2014, p. 60),

> Desde los años sesenta con los trabajos de Piaget sobre el razonamiento formal de los adolescentes hasta nuestros días, con una gran diversidad de líneas de investigación de carácter cognitivo, didáctico, curricular, epistemológico, etc., la preocupación por las dificultades relacionadas con la enseñanza o el aprendizaje de estos objetos de conocimientos sigue vigente.

En consecuencia, la formación de profesores debe tener en cuenta el desarrollo de conocimientos y competencias matemáticas y didácticas con relación a este tema, mediante intervenciones formativas específicas. No obstante, las investigaciones realizadas sobre la problemática del razonamiento proporcional en la formación de profesores son escasas, como señala Rivas (2013). Este autor destaca los trabajos de Simon y Blume (1994); Thompson y Thompson (1994, 1996); Sowder y otros autores (1998); Ben-Chaim, Keret e Ilany (2012); Berk y otros autores (2009); Rivas y Godino (2010); Rivas, Godino y Castro (2012). Diversas investigaciones señalan que, tanto los profesores en formación inicial como en servicio presentan dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad. Los profesores tienden a apoyarse en el algoritmo de la multiplicación cruzada (regla de tres) en situaciones de proporcionalidad, sin razonar su pertinencia (RILEY, 2010). Con frecuencia, los profesores centran la atención en lograr en sus estudiantes una comprensión operacional (aplicación de reglas y algoritmos) sacrificando el desarrollo de una comprensión conceptual, esto es, aplicando razonamiento proporcional (LAMON, 2007).

En este trabajo informamos del diseño, implementación y resultados de una acción formativa con futuros profesores de matemáticas de secundaria sobre el tema de proporcionalidad, cuyo objetivo es explorar sus conocimientos sobre el tema y desarrollar algunos aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático de dicho contenido. Entre los resultados obtenidos destacamos el reconocimiento de las relaciones dialécticas entre el conocimiento matemático en sí mismo, que capacita para la resolución de problemas de proporcionalidad propios de la educación secundaria, y aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático, como son la previsión de diferentes métodos de resolución para las tareas, el reconocimiento de diferentes niveles de algebrización puestos en juego en las soluciones y el enunciado de problemas relacionados.

El documento está organizado en los siguientes apartados. En *Marco teórico y problema de investigación* se introducen los elementos del Enfoque Ontosemiótico (EOS), marco teórico nacido en el seno de la didáctica de la matemática, y el problema específico de investigación. En *Método* se describe el método empleado, contexto, participantes e instrumentos de recogida y análisis de datos, siendo parte de una investigación de diseño. En *Análisis a priori de una área de investigación* se muestra el análisis *a priori* de una de las tareas efectivamente implementadas, esto refiere al tipo de análisis epistémico que se espera que realicen los estudiantes. En *Resultados* se presentan los resultados del análisis de las tareas, en términos de las preguntas de investigación. En *Discusión* se discuten los resultados obtenidos identificando así el nivel de competencia de análisis epistémico desarrollada por los futuros profesores. Finalmente, en *Reflexiones finales* se resaltan algunas implicaciones didácticas.

Marco teórico y problema de investigación

Una investigación sobre formación de profesores de matemáticas necesita explicitar el modelo de conocimientos y de desarrollo profesional que se adopta, así como el enfoque metodológico que orienta y fundamenta la investigación.

Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor (CCDM)

Partimos de una experiencia formativa en la que se pretende estudiar conocimientos matemáticos específicos de futuros profesores y el nivel de competencia epistémica para el reconocimiento de tales conocimientos. En nuestro caso hemos adoptado el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas, en adelante CCDM, propuesto en Godino y otros autores (2017b). Este modelo es un desarrollo del modelo de Conocimientos Didácticos-Matemáticos descrito en Godino (2009) y Pino-Fan y Godino (2015); trabajos teóricos que amplían y complementan al modelo MKT (*Mathematical Knowdlege for Teaching*) descrito por Ball, Lubienski y Mewborn (2001).

Por un lado, se considera que el profesor *debe tener conocimiento matemático común* relativo a un cierto nivel educativo donde imparte su docencia, como también tener un conocimiento ampliado del contenido matemático que le permita articularlo con los niveles superiores; a este tipo de conocimientos se le llama conocimiento matemático *per se*. Por otro lado, a medida que se ponga en juego algún contenido matemático, es claro que el profesor debe tener un *conocimiento didáctico-matemático o especializado* de las distintas facetas que afectan el proceso educativo; dichas facetas son: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, mediacional e instruccional. Así, tanto el conocimiento matemático *per se*, como el especializado están estrechamente relacionados. Dada la complejidad de todos los factores que afectan en un proceso de enseñanza, centramos la atención en la faceta epistémica, en la cual se incluyen como componentes:

- Reconocer los diversos significados del contenido correspondiente y su interconexión.
- Reconocer la diversidad de objetos y procesos implicados (es decir, la *configuración ontosemiótica*) para los diversos significados.

En este modelo CCDM se considera que el futuro profesor debe tener estos conocimientos, pero también debe ser competente para abordar los problemas didácticos básicos que están presentes en la enseñanza. Godino y otros autores (2017b) definen la *competencia de análisis epistémico* como aquella que le permita al profesor identificar los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas necesarias para la resolución de las situaciones-problemas. Dicho reconocimiento permite

> [...] prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de estudio. (p. 94).

Para esto se necesitan otras herramientas teóricas y metodológicas específicas, como se detalla a continuación.

Significado pragmático y configuración epistémica

Dos nociones teóricas claves del Enfoque Ontosemiótico son las de *significado pragmático* (entendido como sistema de prácticas asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado) y *configuración ontosemiótica*, definida como la red de objetos (conceptos, lenguajes, proposiciones, procedimientos y argumentos) que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas. Ambas permiten describir la actividad matemática, tanto desde el punto de vista institucional (epistémico) como personal (cognitivo).

Las características de las prácticas realizadas para resolver tareas matemáticas permiten definir distintos grados o *niveles de algebrización*, entendidos como estadios de intervención de determinados objetos y procesos algebraicos en la resolución de problemas. Para definir dichos niveles, se tiene en cuenta el grado de generalidad o de indeterminación de los objetos, el tratamiento (cálculo) que se aplica a dichos objetos, así como los tipos de lenguajes empleados (natural, numérico, diagramático, simbólico-literal) (GODINO et al., 2014a).

Para el caso de la proporcionalidad, en Godino y otros autores (2017a) se han identificado tres significados pragmáticos específicos de la proporcionalidad ligados a los niveles de algebrización que se ponen en juego en la solución de tareas que involucran la proporcionalidad directa de magnitudes:

- *aritmético*, caracterizado por la aplicación de procedimientos de cálculo aritméticos, (multiplicación, división);
- *proto-algebraico*, centrado en la aplicación de la noción de proporción;
- *algebraico-funcional*, se caracteriza por la aplicación de la noción de la función lineal y de técnicas de resolución basadas en las propiedades de dichas funciones.

También se ejemplifica el uso de la noción de *configuración epistémica* de prácticas, objetos y procesos (FONT; GODINO; GALLARDO, 2013; GIACOMONE et al., 2017) para identificar la trama de objetos y significados que se ponen en juego en dos de dichos significados.

Niveles de algebrización

Para lograr un análisis detallado de la trama de objetos y procesos que se ponen en juego en la resolución de tareas sobre proporcionalidad, nos apoyamos en la distinción de distintos niveles de algebrización de la práctica matemática, tal como se viene manifestando en diversas producciones científicas (CASTRO; PINO-FAN; MARTÍNEZ-ESCOBAR, 2017; GODINO et al., 2015; GODINO et al., 2017a).

- Nivel 0 (Significado aritmético): indica ausencia de razonamiento algebraico, es decir, no se trabaja sobre conceptos y propiedades de índole estructural o funcional.
- Nivel 1 (Significado proto-algebraico, nivel incipiente de algebrización): se comienza a reconocer propiedades de las operaciones, también se reconoce el significado relacional del signo igual por lo que el concepto de equivalencia emerge. En el aspecto funcional se expresa una regla general.
- Nivel 2 (Significado proto-algebraico, nivel intermedio de algebrización): en el aspecto estructural se comienzan a utilizar propiedades de las operaciones, se utiliza el significado relacional del signo igual, por lo que la noción de equivalencia interviene. En el aspecto funcional se expresa una regla general.
- Nivel 3 (Significado algebraico-funcional): indica formas consolidadas de razonamiento algebraico.

Los distintos niveles vienen ejemplificados y justificados en la sección 4, donde se incluye el análisis *a priori* de la tarea de reparto proporcional propuesta a los estudiantes. Así, la solución 1 propuesta en el análisis *a priori* de la tarea de evaluación corresponde al nivel 0 de algebrización (solución aritmética), la solución 2 está asociada al nivel 1 (basada en la relación parte-todo), la solución 3 tiene un carácter proto-algebraico de nivel 2 (valor faltante) y, por último, la solución 4, presentada en la misma sección, tiene un nivel 3 dado que presenta su carácter más formal e involucra la resolución de una ecuación del tipo $Ax+B=Cx$.

El reconocimiento, por parte de los profesores, de los distintos niveles de algebrización en la solución de tareas matemáticas, en particular, en tareas que ponen en juego la noción de proporcionalidad, se considera un aspecto clave del CCDM sobre este contenido.

Función semiótica crítica

Para analizar los conocimientos puestos en juego en tareas de proporcionalidad recurriremos a la noción de función semiótica del EOS. En este marco teórico se entiende una función semiótica como la correspondencia entre un objeto antecedente (expresión, significante) y otro consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) según un criterio o regla de correspondencia (GODINO, 2017). En este sentido, en Contreras y otros autores (2017) se introduce la noción de *función semiótica crítica* (FSC) para identificar los conocimientos clave que se requieren para dar respuesta al problema o tarea planteada.

A partir de los cuatro fundamentos teóricos señalados en este apartado, formulamos el problema de investigación en los siguientes términos:

- ¿Tienen los estudiantes del máster el conocimiento común sobre proporcionalidad adecuado para realizar los análisis epistémicos requeridos?

• ¿Qué objetos y procesos algebraicos se reconocen con más dificultad?
•¿Cuáles son las funciones semióticas críticas en el proceso de resolución de las tareas propuestas?
• ¿En qué medida la acción formativa implementada ha desarrollado la competencia de análisis epistémico de tareas de proporcionalidad, en particular, el reconocimiento de niveles de algebrización involucrados en distintas soluciones a problemas de proporcionalidad?

En el apartado siguiente, describimos la experiencia formativa la cual ayuda a dar una respuesta a las preguntas planteadas.

Método

Enfoque metodológico

Dado que el problema de investigación es diseñar, implementar y evaluar intervenciones formativas para desarrollar en los futuros profesores de Educación Secundaria competencias y conocimientos didáctico-matemáticos sobre un tema específico, el enfoque metodológico debe ser la ingeniería didáctica, en nuestro caso entendida en un sentido generalizado, como proponen Godino y otros autores (2014b). Este enfoque amplía su concepción tradicional (ARTIGUE, 1989) en la dirección de las investigaciones basadas en el diseño (COOB et al., 2003), proponiendo cuatro fases en la investigación: 1) Estudio preliminar; 2) Diseño del experimento; 3) Implementación; 4) Análisis retrospectivo.

Así mismo, para el análisis del proceso formativo se emplea la noción de *hecho didáctico significativo* (HDS) introducida dichos autores: “Se considera que un hecho didáctico es significativo (HDS) si las acciones o prácticas didácticas que lo componen desempeñan una función, o admiten una interpretación, en términos del objetivo instruccional pretendido” (GODINO et al., 2014b, p. 174). Los HDS identificados en *Discusión* se basan en el análisis de las respuestas de diez estudiantes a una tarea usada como evaluación final de los aprendizajes.

Contexto de la investigación, participantes y recogida de datos

La experiencia formativa se ha realizado en el marco del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria (especialidad de Matemáticas), durante el año lectivo 2016-2017, en España, dentro de la asignatura Innovación Docente e Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas. Dicho máster, de un año de duración y que incluye un período de prácticas en centros escolares, constituye la formación inicial que todo graduado universitario debe superar para poder ejercer como profesor de secundaria en España.

Han participado en el estudio 33 estudiantes, futuros profesores, cuyo perfil académico es variado: doce (33,3%) tienen el grado de Matemáticas; quince son ingenieros de caminos o arquitectos (44,1%); tres son físicos y tres proceden de otras ingenierías. Diecinueve estudiantes declaran que tienen alguna experiencia de enseñanza de matemáticas en clases particulares; el resto no la tienen.

La intervención formativa se ha realizado en cuatro sesiones de dos horas y media de duración. Dos de ellas tratan sobre el tópico de visualización, en las que se introduce el análisis de objetos y procesos; otra sesión sobre álgebra en la que introducen los niveles de Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) y una última sesión en la que se evalúa la competencia de análisis ontosemiótico lograda con una tarea sobre proporcionalidad, seguida de la discusión de las soluciones. Por tanto, la cuarta sesión forma parte del proceso instructivo y no tiene una finalidad meramente evaluativa.

La tercera sesión (un taller de dos horas de duración) estuvo centrada en el desarrollo de conocimientos y competencias para el reconocimiento de niveles de algebrización, considerando tres momentos:

1. Presentación de las características del RAE, y el modelo de los niveles de algebrización de la actividad matemática, basados en los trabajos de Godino y colaboradores (GODINO et al., 2014a; GODINO et al., 2015).
2. Trabajando en equipos se propone realizar las siguientes actividades:
    - 2.1 Resolver tareas matemáticas (se propusieron ocho), propias de primaria y secundaria, a ser posible, de varias maneras.
    - 2.2 Asignar niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones dadas en el punto anterior a las tareas, teniendo en cuenta los objetos y procesos algebraicos previamente identificados.
    - 2.3 Enunciar tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.
3. Presentación, discusión de resultados y extracción de conclusiones.

Como trabajo opcional, complementario para incrementar la calificación final del curso, se propuso la solución de cinco tareas. Los protocolos correspondientes a la solución de una de estas tareas son los que se van a analizar en este trabajo con la finalidad de identificar HDS en la faceta cognitiva del proceso formativo implementado.

Instrumentos de recogida de datos

En cada una de las sesiones del curso, se recogieron las respuestas dadas por escrito a tareas específicas, resueltas mediante el trabajo en equipos (de dos o tres estudiantes) y entregadas a través de la plataforma Moodle usada en la gestión del curso. El trabajo complementario opcional, realizado por diez estudiantes de manera individual tras la finalización del curso, refleja por consiguiente los aprendizajes logrados por dichos estudiantes.

Análisis *a priori* de una tarea de evaluación

En este apartado realizamos el análisis de una de las tareas propuesta en la evaluación final, que servirá de referencia para interpretar las respuestas dadas por los estudiantes. Se trata de un problema de reparto proporcional, tomado de Ben-Chaim, Keret e Ilany:

Enunciado: *Se quiere repartir 40 canicas entre Juan y Saúl según la razón 3:5. ¿Cuántas recibirá cada niño?* (2012, p. 134).

Aunque esta situación-problema se puede resolver mediante un razonamiento aritmético, es posible aplicar otros procedimientos que involucran los niveles proto-algebraicos 1 y 2, así como el nivel 3 de algebrización. Este tipo de tarea (categoría de razón parte-parte-todo) involucra una relación entre dos cantidades disjuntas (canicas de Juan y canicas de Saúl) dentro de un todo (canicas a repartir), de manera que la suma de las partes es el todo. Las consignas dadas al futuro profesor sobre este problema fueron:

a) Resolver el problema por dos métodos al menos.
b) Identificar los conocimientos que se ponen en juego en las soluciones.

Para cada solución enumerar la secuencia de prácticas que se realizan para resolver y justificar la solución y completar el cuadro incluido a continuación, añadiendo las filas necesarias.

Cuadro 1

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Uso e intencionalidad de las prácticas*	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*
...	...	...

Fuente: datos de la investigación.

c) Teniendo en cuenta los conocimientos puestos en juego en cada solución reconocer el nivel de algebrización que se pone en juego en cada caso.

d) Enunciar y resolver tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización, justificando la asignación de dichos niveles.

Solución 1- Aritmética (nivel de algebrización 0)

Secuencia de prácticas matemáticas resolutivas:

• Vamos a repartir 40 canicas entre Juan y Saúl, de forma que por cada 3 que recibe Juan, Saúl recibe 5.

• De cada 8 canicas que reciben entre los dos, Juan recibe 3. Las 40 canicas a repartir se pueden agrupar en 5 grupos de 8,$8 \times 5 = 40$.

• Por tanto, Juan recibirá $3 \times 5 = 15$ y Saúl, $5 \times 5 = 25$ (canicas).

En esta solución, que en la terminología de Ben-Chaim, Keret e Ilany (2012) sería del tipo *división por la razón*, intervienen valores numéricos particulares y se aplican operaciones aritméticas sobre dichos valores. La igualdad tiene significado de resultado de una operación. Por tanto, según Godino y otros autores (2014a), la actividad matemática realizada se considera de nivel 0 de algebrización.

Esta secuencia de prácticas operativas y discursivas requiere que el resolutor sea consciente de la razón dada y reconozca la relación multiplicativa que existe entre las cantidades presentes en el enunciado. El estudiante debe comprender que la razón 3:5 describe una situación en la que cada grupo contendría 8 elementos (3 canicas para Juan y 5 canicas para Saúl). Además, debe reconocer que esta razón 3:5 se mantiene tanto para la cantidad total a repartir (las 40 canicas) como para cada grupo dentro del total. De esta forma, se calculará cuántos grupos hay en el total, llegando a la conclusión de que éstos son 5 (40:8).

Identificamos, por tanto, las siguientes funciones semióticas críticas (FSC):

- FSC 1.1. Interpretar la notación 3:5 como relación multiplicativa entre las cantidades de canicas de Juan y Saúl ("por cada 3 que recibe Juan, Saúl recibe 5").
- FSC 1.2. Reconocer en la razón 3:5 el nuevo todo unitario parcial, $3 + 5 = 8$.
- FSC 1.3. Descomponer el total de canicas 40 en 5 grupos de 8, $40 = 8 \times 5$.
- FSC 1.4. Reconocer que la razón 3:5 se mantiene para cada uno de los 5 grupos de 8 canicas.
- FSC 1.5. Aplicar un procedimiento, como la multiplicación ($5 \times 3 = 15$; $5 \times 5 = 25$) o la suma reiterada para llegar a la solución.

Solución 2- Parte-todo (proto-algebraica de nivel de algebrización 1)

Secuencia de prácticas matemáticas resolutivas:

Dado que la razón de reparto de las canicas entre Juan y Saúl es de 3:5, Juan recibirá los 3/8 de las canicas a repartir.

- Es decir, Juan recibe $3/8\times40=15$ canicas.
- Para saber las que recibirá Saúl, sólo tenemos que restarle al número total de canicas, las que recibe Juan, esto es, $40-15=25$.

Se establece una relación general entre la razón de canicas del reparto y el total de canicas a repartir, aunque dicha regla se enuncia con lenguaje aritmético y natural. La actividad matemática realizada supone, por tanto, un nivel 1 de razonamiento algebraico.

Podemos distinguir las siguientes funciones semióticas críticas, además de las FSC 1.1 y 1.2:

- FSC 2.1 Establecer la correspondencia entre la razón de reparto y la fracción de la unidad que corresponde a cada niño.
- FSC 2.2 Reconocer el uso de fracción como operador (que aplicado sobre la cantidad inicial de canicas permite hallar la cantidad final de canicas que corresponde a uno de los niños).
- FSC 2.3. Identificar que el número de canicas del otro niño es la diferencia con el total.

Solución 3. Valor faltante (proto-algebraica de nivel de algebrización 2)

Secuencia de prácticas matemáticas resolutivas:

• Se pretende repartir 40 canicas entre Juan y Saúl, de forma que por cada 3 canicas que reciba Juan, Saúl recibe 5.
• De cada 8 canicas que reciben entre los dos, Juan recibe 3, o sea, los 3/8.
• La relación entre el número de canicas que recibe Juan y el total de canicas repartido es de proporcionalidad directa.
• En una proporcionalidad directa las razones de las cantidades que se corresponden son iguales: $3/8 = x/40$; siendo x el número de canicas que recibe Juan.
• Por tanto $x = (3 \text{ x } 40)/8 = 15$.
• Es decir, Juan recibe 15 canicas y Saúl 40 - 15 = 25.

Si bien la solución de un problema de valor faltante, basada en el uso de las razones y proporciones, involucra una incógnita y el planteamiento de una ecuación, la actividad de algebrización que se realiza es de nivel 2, según el modelo de Godino y otros autores (2014a), ya que la incógnita aparece despejada en un miembro de la ecuación que se establece mediante la proporción.

Con esta técnica, en primer lugar, es preciso identificar las cantidades involucradas y reconocer la relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes. Se debe evocar la igualdad de razones de cantidades que se corresponden y la igualdad de productos cruzados en una proporción para despejar el valor desconocido.

Además de las FSC 1.1 y FSC 1.2 están involucradas:

• FSC 3.1. Reconocer que la correspondencia entre las magnitudes discretas que intervienen es de proporcionalidad directa.
• FSC 3.2. Representar la cantidad desconocida como incógnita y escribir la igualdad de razones.
• FSC 3.3. Resolver la ecuación de primer grado planteada.

Solución 4. Formal/algebraica (nivel 3 de algebrización)

Secuencia de prácticas matemáticas resolutivas:

• Representamos por el número de canicas que recibe Juan y por el número de canicas que recibe Saúl.
• En el reparto de canicas se debe respetar la proporción, $5/5 = x/y$.
• Además, $x+y = 40$, es decir, $y = 40-x$.
• Por tanto, $3/(5\ ) = x/(40-x)$.
• Procedemos a despejar la incógnita: $3(40-x) = 5x$ de manera que:
$120-3x=5x$; $120=8x$; $x=120/8=15$
• De esta manera, Juan recibirá 15 canicas y Saúl 40−15=25.

Para asignar nivel propiamente algebraico (nivel 3) a una práctica se requiere el uso de lenguaje simbólico-literal y que se opere de manera analítica/sintáctica con dicho lenguaje (GODINO et al., 2014a). En la práctica anterior se han planteado de manera simbólica las ecuaciones y se aplica una técnica de sustitución para resolver la ecuación requerida.

Además de la FSC 1.1, distinguimos las siguientes funciones semióticas críticas:

- FSC 4.1. Representar simbólicamente las cantidades desconocidas, x e y .
- FSC 4.2. Establecer la proporción a partir de la razón de reparto (la razón de reparto se debe respetar para cualquier par de cantidades que se correspondan).
- FSC 4.3. Expresar una incógnita en función de la otra.
- FSC 4.4. Aplicar un procedimiento para resolver la ecuación de primer grado.

Resultados

Al finalizar las sesiones, como trabajo complementario para incrementar la calificación final del curso, se propuso la solución de cinco tareas que los alumnos debían entregar a través de la plataforma Moodle. En este apartado incluimos ejemplos concretos de respuestas de los estudiantes, obtenidas a partir del instrumento de evaluación, que nos permitirán determinar el conocimiento común del contenido y el grado de competencia de análisis epistémico-cognitivo logrado con la implementación del proceso formativo.

Métodos de solución y asignación de niveles de algebrización

De los diez estudiantes que realizaron la tarea complementaria opcional, 7 proponen al menos una solución correcta con nivel 0 de algebrización. Las soluciones propuestas corresponden a las categorías de estrategias *pre-formarles* de Ben-Chaim, Keret e Ilany (2012).

En una estrategia pre-formal aditiva, como la que muestra el Cuadro 2, los estudiantes toman 8 canicas y las distribuyen individualmente dando 3 canicas a un niño y 5 a otro. Después toman otras 8 canicas y las distribuyen similarmente hasta agotar las 40 canicas a repartir.

Cuadro 2- Ejemplo de solución aritmética siguiendo una estrategia aditiva

La razón puede interpretarse así: por cada 3 canicas que recibe Juan, Saúl recibe 5. Por tanto, puede plantearse la resolución del problema generando grupos sucesivos de 3 + 5 canicas hasta alcanzar la cifra total de 40. Por tanto, Juan debe recibir 3×5 = 15 canicas y Saúl el resto: 5×5 = 25 canicas.

Fuente: Elaborado por un alumno.

El Cuadro 3 muestra otra solución prototípica de nivel 0 de algebrización (estrategia pre-formal iii) de Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2012). En ella, los estudiantes dividen el todo, es decir, las 40 canicas, en 5 grupos de 8 canicas. En cada grupo, por cada 3 canicas que recibe Juan, Saúl recibe 5.

Cuadro 3- Ejemplo de solución aritmética obtenida dividiendo por la razón

Si se quieren repartir las canicas entre los dos amigos, cuando le doy 5 a uno le doy 3 al otro, es decir, reparto las canicas de 8 en 8. Si divido 40 entre 8 obtendré el número de repartos que haré, que serán 5. En cada reparto le doy a Juan 3 canicas, por tanto, Juan recibe 5×3=15 canicas, mientras que Saúl recibe 5×5=25 canicas.

Fuente: Elaborado por un alumno.

Todos los estudiantes que justificaron el nivel de algebrización en las soluciones aritméticas o de estrategia aditiva, lo hicieron correctamente.

Cinco estudiantes proponen soluciones proto-algebraicas de nivel 1. Estas responden a dos categorías: a) Tabular, b) Parte-todo. Dos de ellos elaboran una tabla similar a la que se muestra en la Tabla 1:

Tabla 1- Ejemplo de solución tabular

Canicas a repartir	8	16	24	32	40
Canicas para Juan	3	6	9	12	15
Canicas para Saúl	5	10	15	20	25

Fuente: Elaborado por un alumno.

El uso de la tabla introduce cierta generalidad potencial al procedimiento. La secuencia de rondas puede prolongarse, lo que indica un intensivo de segundo grado de generalidad. Consideramos pues esta actividad de nivel 1 de algebrización; sin embargo, ambos estudiantes asignan a esta solución nivel 0 de algebrización: uno de ellos no lo justifica y el otro afirma que,

La tarea involucra un nivel 0 de algebrización por los siguientes motivos:

- Se están usando objetos extensivos (particulares) a los que únicamente se les aplican operaciones aritméticas.
- El signo de igualdad es puramente operacional.
- No se usan símbolos o variables como incógnitas.

Los otros tres estudiantes, ofrecen una solución basada en la relación parte-todo (BEN-CHAIM; KERET; ILANY, 2012) que concuerda con la solución 2 del análisis a priori. Dos de los estudiantes asignan correctamente el nivel de algebrización, aunque uno de ellos no lo explica y el otro lo hace de forma confusa. Presentamos en el Cuadro 4 la solución y la justificación del nivel de algebrización asignado a dicha tarea por este estudiante.

Cuadro 4- Solución proto-algebraica de nivel 1

La razón del reparto son 3:5. Es decir, de 8 partes iguales, 3 le corresponden a Juan y 5 a Saúl. $\frac{3}{8}$ de 40 a Juan y $\frac{5}{8}$ de 40 a Saúl. $\frac{3}{8}$ de 40= 15; $\frac{5}{8}$ de 40= 25 La solución es: el reparto es de 15 canicas para Juan y 25 canicas para Saúl.	En la resolución de la tarea por este método ha sido preciso la utilización de conocimientos algebraicos básicos, se usan símbolos como el del porcentaje (%), se realizan operaciones con primer grado de operacionalidad y se utiliza la igualdad como equivalencia. Se trata por ello de un nivel de algebrización 1.

Fuente: Elaborado por un alumno.

Para el tercer estudiante, esta resolución es propia del nivel 0 de algebrización, ya que se trata de *una resolución sin incógnitas, que se vale del significado operacional de la igualdad*.

Dos estudiantes proponen sendas soluciones recurriendo a la estrategia “valor faltante” (BEN-CHAIM; KERET; ILANY, 2012, p. 138). Una variante en forma de diagrama de esta estrategia de solución es la conocida *regla de tres*. Esta técnica en cierto modo oculta la intervención de las razones y la proporción, lo que puede comportar un significado degenerado de la proporcionalidad aritmética. Por ejemplo, presentamos en la parte izquierda del Cuadro 5 la solución dada por uno de los dos estudiantes mediante regla de tres; en la parte derecha se muestra la argumentación que emplea para establecer nivel 1 como nivel de algebrización de la solución propuesta, la cual no es correcta. El otro estudiante que resuelve por el mismo método asigna apropiadamente el nivel de algebrización; sin embargo, no lo justifica.

Cuadro 5- Solución por regla de tres (proto-algebraica de nivel 2)

Como tenemos una razón de 3:5, esto nos indica que sobre 8 canicas Juan recibirá 3 y Saúl 5. Podemos plantear la siguiente proporcionalidad: 8 canicas → 3 Juan 40 canicas→ x Juan Así, Juan recibirá x = 3x 40/8 =15 canicas. Hacemos lo mismo en el caso de Saúl: 8 canicas → 5 Saúl 40 canicas→ y Saúl Saúl recibirá y = 5/8x 40 =25 canicas	Corresponde al nivel 1 de algebrización, pues aparecen incógnitas, pero no se realizan operaciones con ellas ni se resuelven operaciones de la forma AX = B.

Fuente: Elaborado por un alumno.

Por último, cinco estudiantes elaboran soluciones con un nivel propiamente algebraico, similares a la solución 4 formal-algebraica que incluimos en el análisis *a priori* de las tareas. De ellos, dos reconocen adecuadamente el nivel 3 de algebrización en la actividad desarrollada si bien la explicación puede no ser suficientemente precisa (*significado relacional de la igualdad, hallando también variables como incógnitas y el uso del lenguaje simbólico-literal; pues aparecen ecuaciones y se opera con las incógnitas*). Una de las estudiantes asegura que tal solución *sigue un nivel 2 de algebrización, ya que aparece un sistema de ecuaciones, pero no se opera con las incógnitas sino con los números.*

Identificación de conocimientos puestos en juego en las tareas

Cuando se realiza una práctica matemática, interviene un entramado (configuración) de objetos matemáticos vinculados entre sí. Por otro lado, el significado de un objeto matemático queda determinado por el conjunto de prácticas matemáticas en las que aparece involucrado.

Estos objetos dentro de una práctica intervienen como antecedente y/o consecuente de funciones semióticas. Identificar las funciones semióticas críticas que conectan los distintos objetos presentes en las configuraciones, ayuda a mostrar la complejidad del sistema de significados que el docente debe construir y reconocer en la resolución de un problema.

Las respuestas que los futuros profesores dieron a la tarea de reparto proporcional ponen de manifiesto ciertas dificultades para realizar la secuenciación de prácticas elementales, así como para distinguir los objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) referidos en ellas. La mitad de ellos no distinguieron unidades de prácticas dentro de la secuencia de resolución, o bien las configuraciones que realizaron fueron muy escasas (sólo reconocieron parcialmente algunos conceptos como objetos matemáticos implicados). Hemos podido identificar que si bien algunos estudiantes no diferencian los significados de fracción como relación parte-todo o como operador, proponen soluciones distintas que involucran los dos usos. Algunos confunden el significado de la razón o traducen mal los términos de ésta.

En general, los futuros profesores reconocen de forma apropiada los conceptos contemplados en el análisis a priori. Por ejemplo, frente a la práctica: "*Dado que la razón de reparto de las canicas entre Juan y Saúl es de 3:5, Juan recibirá los 3/8 de las canicas a repartir*"; (donde intervienen las funciones semióticas críticas FSC 1.2. y FSC 2.1.) se pueden identificar los conceptos: *reparto proporcional, razón, fracción (parte-todo).*

No obstante, en algunos estudiantes apreciamos una confusión con el significado del objeto primario *concepto.* Por ejemplo, la respuesta dada por dos estudiantes a prácticas distintas señala *relación de incógnitas y resolución de ecuaciones* como conceptos. También es frecuente que *regla de tres* aparezca como concepto en la configuración.

Los futuros profesores son frecuentemente imprecisos con la noción de *proposición.* A veces es interpretada como premisa o argumento en lugar de un enunciado sobre conceptos que necesita justificación o prueba.

La estudiante que realizó la solución aditiva que aparece reflejada en el Cuadro 1 (sin enumerar la secuencia de prácticas) señaló como proposición asociada que: *la razón de reparto puede expresarse como una fracción sobre el total.*

En general, podemos apreciar que los estudiantes reconocen los procedimientos considerados en el análisis a priori. Sin embargo, muestran dificultades en la explicación o justificación del uso que se pretende con la práctica textualizada involucrada.

Por ejemplo, en una solución de estrategia pre-formal aditiva proporcionada por un estudiante, vinculada a la práctica elemental *si reciben canicas a razón de 3:5, empezar repartiendo 3 canicas a Juan y 5 canicas a Saúl*, el estudiante incluye como procedimiento: *expresar una proporción como una suma en la que los sumandos cumplan dicha proporción.*

El estudiante que elaboró la solución mostrada en el Cuadro 4, incluye como práctica elemental: *establecer que la razón, puede expresarse como una fracción sobre el todo: 3/8 y 5/8*; referida a ésta incluye el procedimiento: *creación de dos fracciones que representan las partes de un todo.*

El objeto *argumento* es el menos referido, y cuando lo está, no suele aludir a justificación de una proposición o procedimiento, sino a la descripción de la práctica referida.

Un estudiante que resuelve el problema siguiendo una estrategia formal/algebraica, incluye como argumentos: *deducción a partir de las ecuaciones o resolución del sistema de ecuaciones explicado en los pasos anteriores.*

El estudiante que aborda el problema mediante regla de tres, tal cual se incluye en el Cuadro 4, indica que: *la argumentación está basada en la regla de tres utilizada.* El mismo estudiante incluye el concepto regla de tres en la misma práctica elemental.

Enunciado de nuevas tareas

Las investigaciones relativas a experiencias didácticas desarrolladas con profesores en formación sobre creación de problemas con fines didácticos revelan el estrecho vínculo de estas tareas con las competencias docentes. Destacamos la afirmación de Malaspina, Mallart y Font (2015, p. 2861-2862):

> A teacher must not only be good at solving problems, but also needs to know how to choose, modify and create them with a didactic purpose. A teacher also needs to be able to critically evaluate the quality of the mathematical activity required to solve the problem proposed and, if necessary, to be able to modify the problem in order to facilitate a richer mathematical activity.

Para responder a la consigna *enunciar y resolver tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización, justificando la asignación de dichos niveles* es importante que los futuros profesores hayan identificado previamente los objetos matemáticos en la solución de un problema y establezcan interrelaciones entre ellos (en términos de funciones semióticas).

En su mayoría, los estudiantes tienen dificultades para elaborar de forma pertinente problemas que supongan una variación respecto del enunciado inicial. Los enunciados propuestos se alejan demasiado del problema original, son poco significativos o el contexto no es el de proporcionalidad. Interpretan que introducir nuevas variables, coeficientes, etc. incrementa el nivel de algebrización, y con frecuencia sostienen la creencia de que una mayor complejidad en la resolución del problema está asociado a un mayor nivel de algebrización.

Los tipos de problemas propuestos de forma pertinente por los estudiantes recurren a parámetros para elaborar variantes, utilizando en su mayoría el parámetro: *cantidad de canicas a repartir* (Cuadro 6).

Cuadro 6- Ejemplo prototípico de problema que refiere a un parámetro de cantidad

Juan y Saúl quieren repartir sus canicas a razón 3:5. Indica cuántas canicas le corresponden a cada uno en función del número total de canicas.	Si se quieren repartir k canicas entre Juan y Saúl según la razón 3:5. Determina el valor de k en función del número de canicas de Juan.

Fuente: Elaborado por un alumno.

El uso de parámetros, como registro numérico y coeficientes variables, implica la capacidad de discriminar el dominio y el rango de la *función paramétrica* correspondiente y es indicativo de un cuarto nivel de algebrización, según Godino et al. (2015). Los estudiantes justifican el nivel 4 de algebrización argumentando que *aparecen parámetros, pero no se opera con ellos.*

Discusión: aplicación de las FSC al análisis de los resultados

En el marco teórico del EOS en el que se apoya esta investigación, los errores de los estudiantes se interpretan en términos de discordancia entre los significados institucionales de los objetos implicados en las prácticas matemáticas y los significados personales. Un análisis más detallado de tales discordancias se realiza identificando las funciones semióticas que se establecen entre los objetos implicados en las prácticas correspondientes.

En este estudio, las funciones semióticas vinculadas a las prácticas con una mayor frecuencia de errores en la resolución del problema son las FSC 1.1. y 1.2. A continuación, en el Cuadro 7 mostramos parte de la secuencia de prácticas desarrolladas por una estudiante en la que podemos identificar un conflicto semiótico relacionado con la FSC 1.1. El estudiante no relaciona adecuadamente antecedente y consecuente en la razón 3:5.

Cuadro 7- Ejemplo prototípico 1 de conflicto semiótico

Denominamos al número de canicas de Juan y denominamos al número de canicas de Saúl. Obtenemos las ecuaciones x+y=40 3x=5y	Argumentación: – Primera ecuación: La suma de las canicas de Juan y Saúl es 40 – Segunda ecuación: Tres veces el número de canicas de Juan es 5 veces el número de canicas de Saúl por la razón 3:5

Fuente: Elaborado por un alumno.

Por otro lado, en la solución que se presenta en el Cuadro 8 el estudiante confunde el consecuente de la razón con el número de partes del todo en el reparto de las canicas. Interpreta entonces que la fracción de canicas del total que recibe Juan es 3/5 y, por tanto, las que recibe Saúl son 2/5.

Cuadro 8- Ejemplo prototípico 2 de conflicto semiótico

Juan tendría los 3/5 de las canicas y Saúl los 2/5, por lo tanto Juan =3/5 × 40 = 24 Saúl = 2/5 × 40 =16

Fuente: Elaborado por un alumno.

Podemos concluir que no ha establecido correctamente las FSC 1.1 (no reconoce la relación multiplicativa entre las cantidades de canicas de Juan y Saúl) y FSC 1.2. (no identifica en la razón 3:5 el nuevo todo unitario parcial, 3+5=8).

Una tercera solución incorrecta se resalta en el Cuadro 9 donde el reparto de canicas se establece según la proporción 3/(2)=x/(40-x). En este último caso, son las FSC 1.1 y FSC 4.2 (establecer la proporción a partir de la razón de reparto) las que están detrás de la respuesta errónea.

Cuadro 9- Ejemplo prototípico 3 de conflicto semiótico

Juan: x canicas y Saúl 40–x (x/40) / (40–x/40) = 3/2 x/40–x =3/2 2x=120–3x 5x= 120 x=24; Juan 24 canicas, Saúl: 40 – 24 = 16

Fuente: Elaborado por un alumno.

El análisis de los datos ha permitido identificar algunos Hechos Didácticos Significativos (HDS) en la faceta cognitiva del proceso formativo implementado. Dichos HDS tienen una cierta incidencia en la muestra de sujetos y, por tanto, pueden ser indicativos de la manifestación de *fenómenos didácticos*:

- A pesar de haber cursado el grado de matemáticas algunos estudiantes manifiestan carencias en el conocimiento común del contenido de proporcionalidad.

- Las siguientes facetas de la competencia de análisis epistémico de las tareas apenas se han desarrollo tras el proceso formativo:

• Descomposición en prácticas elementales de la solución de los problemas.
• Identificación de proposiciones y procedimientos, y consiguientemente, la argumentación de dichos objetos.
• Reconocimiento de los niveles proto-algebraicos de las prácticas matemáticas.
• Elaborar problemas por variación de un enunciado dado.

Los estudiantes de nuestra muestra han revelado importantes carencias en estos conocimientos didáctico-matemáticos, posiblemente por su complejidad intrínseca y el escaso tiempo dedicado a su desarrollo. Estas limitaciones nos llevan a reconocer una concepción pobre y sesgada de la naturaleza del razonamiento algebraico elemental. No obstante, dichos resultados son de esperar, dadas las dificultades que resaltan las investigaciones para abordar tareas de este tipo (VAN DOOREN; VERSCHAFFEL; ONGHENA, 2003).

Reflexiones finales

Sowder y otros autores (1998) proponen un conjunto de recomendaciones para la formación de profesores en el campo del razonamiento proporcional. En particular, afirman que “Los profesores de secundaria obligatoria (middle-grade) deberían tener una comprensión profunda de los componentes conceptuales del razonamiento proporcional y su centralidad en todo el pensamiento matemático” (p. 144). Esto es así porque una parte importante del papel del profesor de matemáticas es comprometer a los estudiantes en experiencias que involucren conceptos críticos, al tiempo que les desafían en sus ideas previas con las que llegan a la instrucción.

En este artículo se ha mostrado el diseño y la implementación de una acción formativa para desarrollar conocimientos y competencia para el análisis epistémico de futuros profesores de matemáticas. Por un lado, se trata de innovación basada en la práctica reflexiva, siendo una actitud favorable hacia el desarrollo profesional del profesor (POCHULU; FONT; RODRÍGUEZ, 2016; PONTE et al., 2017). Por otro lado se ha puesto en evidencia la complejidad de los objetivos planteados; tal como señalan Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer (2017) el desarrollo de este tipo de competencias es un reto para la formación y aún más cuando se trata de proporcionalidad y conocimiento algebraico como muestran nuestros resultados.

La actividad de reflexión epistémica que hemos implementado en nuestra intervención formativa está orientada al logro de una comprensión profunda, no solo de los componentes conceptuales del razonamiento proporcional, sino también los componentes proposicionales y argumentativos. El reconocimiento de diferentes niveles de algebrización en la resolución de tareas de proporcionalidad constituye otro aspecto importante de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático requerido para una enseñanza idónea de este contenido.

Tener una relación profesional adecuada con la naturaleza del razonamiento algebraico, y la argumentación matemática es esencial para gestionar procesos de aprendizaje matemático con alta idoneidad epistémica, es decir, con un alto grado de representatividad de los significados institucionales implementados respecto de los significados de referencia.

Referencias

ARTIGUE, Michèle. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1989.

BALL, Deborah; LUBIENSKI, Sarah; MEWBORN, Denise. Research on teaching mathematics: the unsolved problem of teachers’ mathematical knowledge. In: RICHARDSON, Virginia (Ed.). **Handbook of research on teaching**. Washington, D.C.: American Educational Research Association, 2001. p. 433-456.

BEN-CHAIM, David; KERET, Yaffa; ILANY, Bat-Sheva. **Ratio and proportion:** research and teaching in mathematics teachers' education. Rotterdam: Sense, 2012.

BERK, Dawn et al. Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. **Mathematical Thinking and Learning**, Vancouver, v. 11, n. 3, p. 113-135, 2009.

CASTRO, Walter; PINO-FAN, Luis; MARTÍNEZ-ESCOBAR, John. Levels of algebrization of the school mathematics activity: text book analysis and students difficulties. **REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education**, Barcelona, v. 6, n. 2, p. 164-191, 2017.

CONTRERAS, José et al. Funciones semióticas críticas en el uso de diagramas de barras por los medios de comunicación. In: CONTRERAS, José et al. (Ed.). CONGRESO INTERNACIONAL VIRTUAL SOBRE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS, Granada, 2017. **Actas...** Granada: CIVEOS, 2017. p. 1-11.

COOB, Paul et al. Design experiments in educational research. **Educational Researcher**, Washington, D.C., v. 32, n. 1, p. 9-13, ene. 2003.

FONT, Vicenç; GODINO, Juan D.; GALLARDO, Jesús. The emergence of objects from mathematical practices. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, n. 82, n. 1, p. 97-124, mayo 2013.

GIACOMONE, Belén; GODINO Juan D.; BELTRÁN-PELLICER, Pablo. Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 44, p. 1-21, 2018.

GIACOMONE, Belén et al. Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. **Revista Complutense de Educación,** Madrid, v. 29, n. 4, p. 1-24, jan. 2018.

GODINO, Juan D. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. **Unión**, San Cristóbal de La Laguna, n. 20, p. 13-31, dic. 2009.

GODINO, Juan D. Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. In: CONTRERAS, José et al. (Ed.). CONGRESO INTERNACIONAL VIRTUAL SOBRE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS, Granada, 2017. **Actas...** Granada: CIVEOS, 2017. p. 1-20.

GODINO, Juan D. et al. Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 90-113, abril, 2017b.

GODINO, Juan D. et al. Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 34, n. 2/3, p. 167-200, 2014b.

GODINO, Juan D. et al. Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar: implicaciones para la formación de maestros. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 32, n. 1, p. 199-219, ene. 2014a.

GODINO, Juan D. et al. Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, n. 8, p. 117-142, sept. 2015.

GODINO, Juan D. et al. Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. In: CONTRERAS, José et al. (Ed.). CONGRESO INTERNATIONAL VIRTUAL SOBRE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS, Granada, 2017. **Actas...** Granada: CIVEOS, 2017a. p. 1-10.

LAMON, S. Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. In: LESTER, Frank (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning.** v. 1. New York: Information Age, 2007. p. 629-667.

MALASPINA, Uldarico; MALLART, Albert; FONT, Vicenç. Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. In: KRAINER Konrad; VONDROVÁ, Naďa (Ed.). CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 9., 2015, Praga. **Proceedings of the…** Praga: CERME, 2015. p. 2861-2866.

OBANDO, Gilberto; VASCO, Carlos; ARBOLEDA, Luis. Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. **Relime**, México, v. 17, n. 1, p. 59-81, mar. 2014.

PINO-FAN, Luis; GODINO, Juan D. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. **Paradigma**, Maracay, v. 36, n. 1, p. 87-109, mar. 2015.

POCHULU, Marcel; FONT, Vicenç; RODRÍGUEZ, Mabel. Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. **Relime**, México, v. 19, n.1, p. 71-98, mar. 2016.

PONTE, Joao et al. Elementary teachers' professional development in interrelation with the context of mathematics teaching practice. **Relime**, México, v. 20, n. 1, p. 1-24, 2017.

RILEY, Kate J. Teachers' understanding of proportional reasoning. In: BROSNAN, Patricia; ERCHICK, Diana B.; FLEVARES, Lucia (Ed.). ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 32., 2010, Columbus. **Proceedings of the…** v. 6. Columbus: The Ohio State University, 2010. p. 1055-1061.

RIVAS, Mauro. **Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de educación primaria.** 2013. 525p. Tesis (Doctorado) – Facultad de Educación, Universidad de Granada, Granada, 2013.

RIVAS, Mauro; GODINO, Juan D. Desarrollo del conocimiento del profesor mediante el estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas de la proporcionalidad. **Educere**, Mérida, v. 14, n. 48, p. 189-205, 2010.

RIVAS, Mauro; GODINO, Juan D.; CASTRO, Walter. Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 42B, p. 559-588, abr. 2012.

SIMON, Martin; BLUME, Glendon. Mathematical modelling as a component of understanding ratio-as-measure: A study of prospective elementary teachers. **Journal of Mathematical Behavior,** v. 13, n. 2, p. 183-197, jun. 1994.

SOWDER, Judith et al. Educating teachers to teach multiplicative structure in the middle grades. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Dordrecht, v. 1, n. 2, p. 127-155, 1998.

THOMPSON, Alba; THOMPSON, Patrick. Talking about rates conceptually, part II: Mathematical knowledge for teaching. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 27, n. 1, p. 2-24, ene. 1996.

THOMPSON, Patrick; THOMPSON, Alba. Talking about rates conceptually, part I: a teacher's struggle. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 25, n. 3, p. 279-303, 1994.

VAN DOOREN, Wim; VERSCHAFFEL, Lieven; ONGHENA, Patrick. Pre-service teachers' preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Dordrecht, v. 6, n. 1, p. 27-52, mar. 2003.

WILHELMI, Miguel. R. Proporcionalidad en educación primaria y secundaria. In: CONTRERAS, José et al. (Eds.). CONGRESO INTERNATIONAL VIRTUAL SOBRE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS, 2., 2017, Granada. **Actas del…** Granada: CIVEOS, 2017. p. 1-16.

Recibido en: 28.06.2017
Revisiones en: 16.02.2018
Aprobado en: 03.04.2018

María Burgos es doctora por la Universidad de Almería. Profesora en la Universidad de Granada.

Pablo Beltrán-Pellicer es doctor por la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). Profesor asociado en la Universidad de Zaragoza.

Belén Giacomone es máster por la Universidad de Granada. Doctoranda en la Universidad de Granada (UGR).

Juan D. Godino es doctor por la Universidad de Granada. Profesor catedrático en la Universidad de Granada (UGR).