

Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas¹

Yuri Morales-López²

<http://orcid.org/0000-0002-2973-4038>

Vicenç Font Moll³

<http://orcid.org/0000-0003-1405-0458>

Resumen

Valorar la práctica docente es una tarea necesaria para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. El propósito de este estudio es analizar las valoraciones que realiza una docente de Matemáticas en servicio al observar en video la clase que implementó al enseñar el tema de función logarítmica en cuarto año de Educación Secundaria. Para esto, se realizó un estudio de casos con observación no participante. El diseño de investigación responde a un estudio de caso enmarcado en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. Dos protocolos de investigación fueron aplicados: 1) un análisis experto basado en el enfoque indicado para determinar prácticas, procesos y objetos matemáticos, y 2) una valoración de idoneidad didáctica. Las valoraciones realizadas fueron clasificadas a través de los criterios, componentes e indicadores de idoneidad didáctica propuestos por el modelo de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos. Los análisis realizados muestran que las valoraciones de la docente enfatizan los criterios epistémico e interaccional y que tales valoraciones pueden ser clasificadas y organizadas mediante los criterios de idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores. Además, la metodología empleada ofrece un aporte para los profesores que deseen reflexionar sobre la instrucción matemática que realizan y puede permitirle reconocer elementos y temas de mejora en su práctica educativa.

Palabras clave

Modelo CCDM – Profesores en servicio – Autoevaluación – Logaritmos – Videograbaciones.

1- Agradecemos profundamente a la profesora quien nos ha colaborado y ha permitido estudiar su clase.

Este trabajo se ha elaborado en el marco de los proyectos de investigación: EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE), el proyecto SIA 0005-14 (UNA, Costa Rica) y el convenio internacional CI 0292.

2- Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica. Contacto: ymorales@una.cr.

3- Universidad de Barcelona, Barcelona, España. Contacto: vfont@ub.edu.



DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/S1678-4634201945189468>

This content is licensed under a Creative Commons attribution-type BY-NC.

Evaluation by a teacher of the suitability of her mathematics class^{4}*

Abstract

Evaluation of teaching practice is a necessary task to improve the teaching and learning processes. The purpose of this study is to analyze the assessments made by a Mathematics in-service teacher when she observed a video recording of a class in which she taught students about the logarithmic function in the fourth year of Secondary Education. To do so, a case study with non-participant observation was carried out. The research design is a case study using an Onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. Two research protocols were applied: 1) an expert analysis based on this approach to determine mathematical practices, processes and objects, and 2) an evaluation of didactic suitability. The assessments made were classified using the criteria, components and indicators of didactic suitability proposed in the Didactic-Mathematical Knowledge and Competencies (DMKC) model. The results show that the teacher's evaluations emphasize epistemic and interactional criteria and that such evaluations can be classified and organized using didactic suitability criteria, and their components and indicators. In addition, the methodology applied is useful for teachers who wish to evaluate the mathematical instruction they provide, and can allow them to recognize elements and topics for improvement in their educational practice.

Keywords

DMKC model – In-service teachers – Self-assessment – Logarithms – Video recordings.

Introducción

Una de las principales tareas asociadas a los procesos de instrucción es evaluar lo que ocurre en el aula y tratar de mejorarlo. Esta tarea depende de múltiples factores y cuando se piensa en evaluar estos procesos, varias preguntas son fundamentales: ¿Qué parámetros habría que considerar para evaluar la pertinencia de un proceso de enseñanza y aprendizaje? ¿Qué es una clase pertinente, idónea o con excelencia? ¿Qué capacidad de identificación e interpretación posee quien realiza la valoración de las situaciones? ¿Cuáles son las creencias alrededor de una buena clase de matemáticas?

4- We deeply appreciate the teacher who collaborated with us and allowed us to study her class.

This paper has been developed within the framework of the research projects: EDU2015-64646-P (MINECO / FEDER, EU), the SIA project 0005-14 (UNA, Costa Rica) and the international agreements CI 0292 and Cod018133.

*Xinia Rodríguez Castillo is the responsible for the English version of this article. Contact: xinia99@gmail.com

Si bien estas preguntas pueden originar amplias agendas de investigación en el área de la Educación Matemática, una manera de abordar el estudio de la valoración de los procesos de instrucción es desde el modelo de análisis didáctico propuesto por el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos (GODINO; BATANERO; FONT, 2007), donde el propósito final del análisis es plantear una posible mejora de un proceso de instrucción implementado.

Hacer una reflexión valorativa sobre la implementación de una clase no es sencillo si no se cuentan con algunos criterios que guíen las valoraciones. Una forma de abordar el problema de cómo valorar un proceso de instrucción es buscar ciertas características deseables y no deseables en una clase, con el objetivo de tratar de inferir un tipo de idoneidad de la misma en un contexto. En un extremo podría comprenderse a través del cumplimiento de ciertos indicadores estáticos y predefinidos a priori, que han de ser verificados para alcanzar una clase con características deseadas, de forma en que se aíse cada variable y se puntúe en una métrica dada. Otro enfoque que se puede considerar es identificar ciertos indicadores, cómo se condicionan unos con otros y la forma en que se entrelazan en un contexto.

Respecto a esta forma de concebir estos dos puntos de vista, Huang y Li señalan que, “[...] las nociones acerca de la instrucción efectiva en las clases de matemáticas y las maneras de alcanzarlas son culturalmente específicas e impactadas recíprocamente dentro de un contexto particular (contenido específico y un grupo de personas)” (2009, p. 308). Desde este punto de vista es posible que la excelencia sea un balance dinámico entre las características que sean definidas como correctas y su puesta en práctica en un contexto particular (HUANG; LI, 2009).

En esta línea, el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (GODINO; BATANERO; FONT, 2007) y, en particular, el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas (CCDM) (GODINO et al., 2017; BREDA; FONT; PINO-FAN, 2017) ofrecen herramientas teóricas, en especial, la noción de idoneidad didáctica, la cual se desglosa en seis criterios, que a su vez lo hacen en componentes e indicadores interconectados entre sí y cuyo peso es relativo en función de circunstancias temporales y contextuales cambiantes (GODINO; BATANERO; FONT, 2007; BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018).

Por otra parte, en el caso específico de Costa Rica, los docentes de matemáticas en secundaria cuentan con múltiples carencias tanto del conocimiento pedagógico como del didáctico-matemático (MORALES-LÓPEZ, 2017). También hay evidencia que una situación similar podría estar ocurriendo en algunas etapas de la formación inicial de estos profesores (MORALES-LÓPEZ, 2017; MORALES; FONT, 2017). Con estas condiciones, se hace indispensable repensar temas como la formación inicial, desarrollo profesional y contratación de profesores (una visión a macroescala), así como también que los profesores en servicio valoren y propongan mejoras de su propio quehacer (una visión a microescala).

La presente investigación está vinculada con los principales elementos de análisis y valoración que una profesora en servicio utiliza cuando se le pide que comente una clase que impartió y que fue grabada en video, sin ninguna pauta de análisis previamente establecida. Se desea conocer cuáles factores considera que son de interés y la valoración que realiza de cada situación. Para esto, se grabó en video una clase donde desarrolló el

tema de función logarítmica. Luego, se le pidió que lo observara e indicara qué elementos son de interés para un posible análisis de su clase de matemáticas y la razón del por qué son de su interés.

La novedad relevante es que este análisis didáctico, en particular la valoración de la idoneidad didáctica, se toma como referencia para estudiar el análisis y la valoración que hace la profesora que ha sido grabada, cuando tiene que reflexionar sobre la clase que ha impartido. La información que esta investigación pueda generar brinda herramientas para que un profesor valore su clase de matemáticas en un contexto particular. También puede aportar información sobre cómo los profesores identifican situaciones de interés en sus clases.

Marco teórico

Reflexión de lo que ocurre en la clase de matemáticas y las videograbaciones como recursos

Poder valorar lo que ocurre en el aula parece ser una de las capacidades básicas que debe poseer el profesor de matemáticas. Para esto se requiere conocer marcos conceptuales y herramientas metodológicas apropiadas (GODINO; BATANERO, 2009). Para Seckel, un profesor expresa o evidencia la competencia de reflexión sobre la práctica, propia o ajena si “[...] analiza críticamente su práctica pedagógica y la de otros docentes en función de su impacto en el aprendizaje de los estudiantes, y propone y fundamenta cambios para mejorarla” (2016, p. 40). En el caso de esta investigación interesan posibles estrategias que lleven a esta valoración, de manera que el profesor pueda advertir o identificar situaciones de interés y poder explicarlas para dar sentido a prácticas alternativas (MASON, 2002, 2017).

El *Estudio de la lección (Lesson study)* (CLARKE et al., 2006; ISODA et al., 2007; LEWIS; TSUCHIDA, 1998; YOSHIDA, 1999) es una estrategia o metodología empleada para el mejoramiento de la educación matemática, que también ha ganado espacio en los procesos de formación inicial y el desarrollo profesional de docentes de matemáticas en servicio.

Si bien el *Estudio de la lección* puede ser usado para crear actividades o buenas prácticas, Yoshida indica que no es ese su objetivo. La principal preocupación de este es que profesores que están fuera del contexto de estudio o fuera de comunidades escolares que estudian la lección “[...] adopten sin ninguna reflexión estas prácticas cuando hay carencias en su comprensión, debido a la falta de conocimiento matemático y pedagógico, y pocas habilidades para observar y evaluar el aprendizaje de sus estudiantes en el aula” (2012, p. 141). Aunque este autor se centra en el caso de los profesores en EE.UU., esta preocupación es válida en gran parte de la comunidad de educadores.

La utilización de videos para hacer análisis de procesos de instrucción también es una estrategia utilizada actualmente para evaluar las capacidades y competencias de un profesor a partir de situaciones seleccionadas (BORKO et al., 2011; KAISER et al., 2015).

Kaiser y otros autores (2015) indican que esta estrategia es importante pues da un panorama más amplio de las situaciones en el aula y permite valorar mejor la capacidad y conocimiento de los profesores que son evaluados (en comparación, por ejemplo, con evaluación de situaciones descritas en lápiz y papel). Asimismo, estos autores advierten

que podría existir una limitación importante en esta estrategia cuando las clases grabadas son construidas artificialmente (con situaciones implantadas) pues se pierden las acciones auténticas que ocurren en una clase real. Existen ya varios marcos teóricos que respaldan los posibles usos de los videos con los profesores de matemáticas dependiendo de la forma en que desee utilizarse (COLES, 2014).

Sustentar teóricamente el beneficio del análisis de videos va más allá del objetivo de este artículo. En el caso de esta investigación, el docente analiza su propia instrucción matemática en el aula, valorando su quehacer y explorando en los videos grabados, situaciones, decisiones o conductas que realizó de forma consciente o inconsciente.

Dadas las tendencias internacionales señaladas, el uso de video para aproximarse a situaciones de instrucción reales ha tomado fuerza y algunas investigaciones ofrecen resultados específicos sobre la formación de maestros y las videograbaciones (ROSAEN et al., 2008, KLEINKNECHT; SCHNEIDER, 2013).

El modelo CCDM

El análisis didáctico de lo que ocurre en el aula puede ser abordado desde distintas perspectivas. En particular, el modelo CCDM (GODINO et al., 2017; BRENDA; FONT; PINO-FAN, 2017) basado en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (GODINO; BATANERO; FONT, 2007) ofrece herramientas teóricas para estructurar lo vinculado a este análisis.

El CCDM considera que una de las competencias clave del profesor de matemáticas es la competencia general de análisis e intervención didáctica, la cual se desglosa en cinco subcompetencias vinculadas al análisis de: a) significados globales, b) prácticas matemáticas, c) configuraciones didácticas, d) normas, e) idoneidad didáctica. Para el presente estudio se ha utilizado este modelo, poniendo énfasis en la subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica. La idoneidad didáctica del EOS se comprende como una articulación coherente de seis criterios específicos de idoneidad (Tabla 1).

Tabla 1- Criterios de idoneidad didáctica

Criterio	Descripción
Epistémico	Para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas "buenas matemáticas".
Cognitivo	Para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar.
Interaccional	Para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos.
Mediacional	Para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.
Afectivo [o emocional]	Para valorar la implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de instrucción.
Ecológico	Para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etcétera.

Fuente: Extraído de Font, Planas y Godino (2010, p. 102).

Cada uno de estos criterios puede ser desglosado en componentes e indicadores a manera de rúbrica, con el fin de hacerlos operativos. Para esta investigación se utiliza la propuesta de Font (2015). Se detallan a continuación los criterios y componentes de idoneidad didáctica de la propuesta mencionada (por cuestiones de espacio no se detallan los indicadores) (Tabla 2).

Tabla 2- Criterios y componentes de idoneidad

Criterio	Componente
Epistémico	(IE1) Errores, (IE2) Ambigüedades, (IE3) Riqueza de procesos, (IE4) Representatividad
Cognitivo	(IC1) Conocimientos previos, (IC2) Adaptación curricular a las diferencias individuales, (IC3) Aprendizaje, (IC4) Alta demanda cognitiva
Interaccional	(II1) Interacción docente-discente, (II2) Interacción entre discentes, (II3) Autonomía, (II4) Evaluación formativa
Mediacional	(IM1) Recursos materiales, (IM2) Número de estudiantes, horario y condiciones del aula, (IM3) Tiempo
Afectivo o emocional	(IA1) Intereses y necesidades, (IA2) Actitudes, (IA3) Emociones
Ecológico	(IEC1) Adaptación al currículo, (IEC2) Conexiones intra e interdisciplinares, (IEC3) Utilidad sociolaboral, (IEC4) Innovación didáctica

Fuente: Basado en FONT (2015).

A continuación, se describe la metodología empleada en este estudio.

Marco metodológico

Este estudio es de tipo cualitativo en la modalidad de estudio de casos donde se profundiza en las características de pocos individuos (STAKE, 1995). Se utilizó un video de una clase grabada en 2015. El estudio fue conducido en 2016 y fue de tipo descriptivo y en el plano del investigador se utilizó la observación no participante.

Descripción de la participante

Se seleccionó una profesora de matemáticas de Educación Secundaria en servicio con 38 años de edad, graduada de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de una universidad estatal en Costa Rica, en 2008. Para el 2014 contaba con 14 años de experiencia docente (comenzó a trabajar antes de graduarse). En 2010 ingresó a laborar como profesora en el colegio donde fue grabada. La selección de la participante fue por conveniencia (STAKE, 1995).

Protocolo

Se realizó una grabación de una clase de matemáticas de una profesora de Educación Secundaria mientras impartía el tema de función logarítmica en un colegio público de

Costa Rica. En una primera etapa, la grabación (1 hora, 05 minutos, 40 segundos) fue examinada de la siguiente manera:

1- Un análisis experto de los primeros cuatro tipos de análisis didácticos propuestos en el modelo de análisis didáctico basado en los constructos del EOS tal como se hace en Godino, Contreras y Font (2006); y Pochulu y Font (2011), para poder determinar las prácticas, objetos y procesos matemáticos, funciones del profesor y del alumno, configuraciones didácticas, conflictos semióticos, patrones y normas.

2- Con la información obtenida del punto 1, se realizó una valoración experta de la idoneidad didáctica (quinto tipo de análisis didáctico del modelo de análisis didáctico basado en constructos del EOS) para que sirviera como referencia para el estudio de las valoraciones de la profesora. Ver como modelo del estudio de valoraciones a Montiel y otros autores (2009).

En una segunda etapa, se solicitó a la profesora que impartió la clase hacer un análisis de su actividad, con el fin de conocer las intenciones explícitas que ella tuvo y que valorara las situaciones ocurridas. Para esto, se realizó un taller con la profesora en el que se le presentó el video en dos ocasiones consecutivas; posteriormente, se le solicitó que registrara de forma escrita los elementos que considerara importantes de analizar de la actividad matemática presentada (luego de las dos reproducciones continuas ella tenía posibilidad de manipular la reproducción del video más veces: adelantar, retrasar, pausar o detener). La actividad tuvo una duración de 3 horas y 30 minutos.

En una tercera etapa, se clasificaron las valoraciones de la profesora utilizando los criterios y componentes de idoneidad didáctica descritos en el apartado El modelo CCDM (FONT, 2015).

Por último, en una cuarta etapa, se contrastó la información ya categorizada de lo expresado por la profesora (tercera etapa) y el análisis realizado en las dos primeras etapas para mostrar cuáles valoraciones coincidían con las sugeridas por la valoración experta de los criterios, componentes e indicadores de idoneidad y cuáles de estos no identificó ni valoró la docente; se analizó el contenido de la valoración de la docente para conocer su pertinencia en la justificación que realiza.

Contexto y descripción de la clase

La profesora trabajó con sus estudiantes el concepto de la función logarítmica, que es un contenido considerado en cuarto año de secundaria del Plan de Transición entre el Programa de Estudios anterior y el Programa de Estudios actual (COSTA RICA, 2012). Se trabajó con estudiantes entre 15 y 17 años. Ella organizó la clase con base en las sugerencias puntuales que se indican en el Programa de Estudios de Matemáticas del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (COSTA RICA, 2012). En el Cuadro 1 se describen las indicaciones del Programa de Estudios de Matemáticas.

Cuadro 1 - Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales descritas en el programa oficial de Matemáticas. Costa Rica

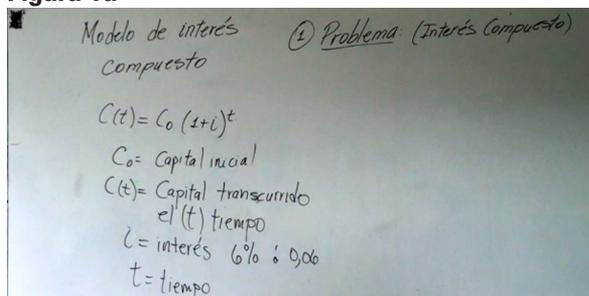
Conocimientos: Funciones logarítmicas, La función $\log_a x$, Ecuaciones logarítmicas
<p><i>Habilidades específicas</i></p> <p>9. Identificar la función logarítmica como la inversa de la función exponencial. 10. Analizar gráfica y algebraicamente las funciones logarítmicas.</p>
<p><i>Indicaciones puntuales</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Para introducir el tema, conviene usar un problema en el que surja de forma natural la función logarítmica. <p>(Problema) Laura Marcela deposita 225 000 colones en su cuenta de ahorros en un banco y al final de t años recibe una notificación del banco indicando que en su cuenta tiene 375 000 colones. Si la tasa de interés es de un 6% compuesta mensualmente y si ella no hizo un nuevo depósito ni retiro durante esos años, ¿cuántos años han transcurrido desde el depósito hasta la notificación del banco?</p> <p>En este problema es importante proporcionar el modelo</p> $C(t) = C_0 (1 + i/n)^t$ <p>y a partir de él justificar la necesidad de introducir la función logarítmica.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Durante la etapa de cierre introduzca la función logaritmo como inversa de la exponencial. Utilice la composición de funciones para justificar esta propiedad. <p>Cada estudiante debe saber que si $a > 0$, $a \neq 1$, entonces $\log_a y = x$ si y sólo si $y = a^x$. Por lo tanto $\log_a y$, $y > 0$ es el número al que se debe elevar la base a para obtener y.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Cambiar de la forma exponencial a la forma logarítmica y de la logarítmica a la exponencial.

Fuente: Transcripción del Ministerio de Educación Pública (COSTA RICA, 2012, p. 415-416).

En las Figuras 1a, 1b, 1c, 1d, 1e, 1f, se muestra la secuencia de trabajo empleado por la profesora en su clase.

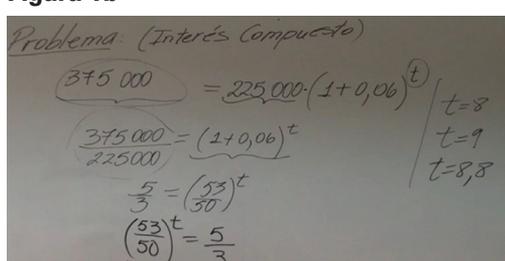
Figuras 1a, 1b, 1c, 1d, 1e, 1f - Secuencia de los apuntes en la pizarra

Figura 1a



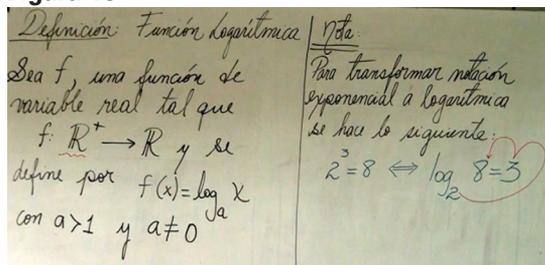
Fuente: Fotografías extraídas de la videogración.

Figura 1b



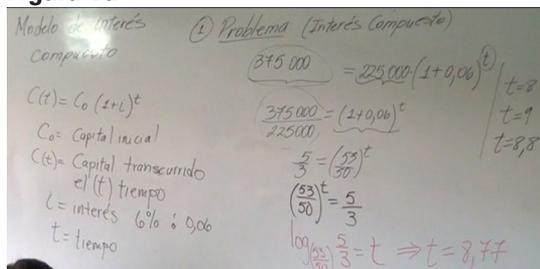
Fuente: Fotografías extraídas de la videogración.

Figura 1c



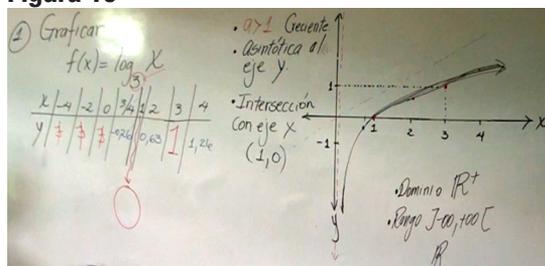
Fuente: Fotografías extraídas de la videograbación.

Figura 1d



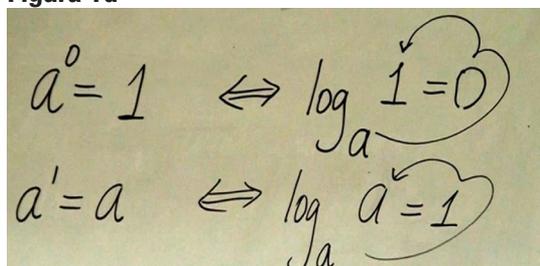
Fuente: Fotografías extraídas de la videograbación.

Figura 1e



Fuente: Fotografías extraídas de la videograbación.

Figura 1d



Fuente: Fotografías extraídas de la videograbación.

En la primera parte (Figura 1a), la profesora les recuerda a los estudiantes el problema que había planteado la clase anterior y escribe el modelo matemático que resuelve el problema. Define el nombre de los parámetros del modelo que ella indica que sirve para resolver la situación que les ha presentado y les pide que formen grupos de trabajo. Al iniciar el trabajo, tras una pregunta, les indica que usen el método de prueba y error. En la Figura 1b, los estudiantes mencionan algunas aproximaciones. Un grupo de estudiantes indicó que el valor estaba entre $t=8$ y $t=9$. Ella indica que es evidente que no tienen herramientas para resolver esa ecuación exponencial, por lo que va a introducir una función que se llama función logaritmo para resolver el problema.

En la Figura 1c, se muestra como escribió una definición errónea de la función logaritmo, y la forma de conversión entre una expresión exponencial y logarítmica. Ella explica la definición e introduce el procedimiento para convertirlos. Esto lo hace a partir de un ejemplo particular ($2^3=8$ si y solo si $\log_2 8=3$) y utiliza una técnica de memoria asociativa basada en un dibujo, cuyo trazo es similar a un corazón. En la Figura 1d, se muestra la manera en que retomó el problema anterior y aplica la nota que explica la conversión con la técnica del corazón (trazo en forma de corazón como regla nemotécnica gráfica). La profesora les pide que le indiquen dónde colocar los datos en el modelo escrito en la pizarra para realizar la conversión de $(53/50)^t = (5/3) \Leftrightarrow t = \log_{(53/50)} (5/3)$. Luego, indica que ingresen la información en la calculadora.

En la penúltima parte (Figura 1e) la profesora grafica una función logarítmica [$f(x) = \log_3 x$]; para ello escribe en la pizarra una tabla con los valores de la variable x y les pide completar la tabla utilizando la calculadora (los valores de la variable dependiente y). Ella deliberadamente les escribe valores no comprendidos en el dominio \mathbb{R}^+ para que adviertan lo que ocurre en la calculadora. Seguidamente, la profesora habla de los valores positivos de la tabla que escribió en la pizarra y pide agregar el 1 en la tabla (en el dominio), pues lo olvidó (su intención fue hablar de la intersección con el Eje X más adelante). Ella comenta sobre la característica de los valores de la variable dependiente y (tendencia creciente). En seguida realiza el trazo en el plano cartesiano y plantea la idea de que el trazo no toca el Eje Y-y les recuerda el significado de asíntota (la analogía que usó fue que había una cerca electrificada y el trazo no podía tocarla).

Ella les indica que la intersección con el Eje X es (1,0) y les pregunta sobre la intersección con el Eje X de la gráfica de la función exponencial. Explica sobre la inyectividad y sobreyectividad de la función, e indica que la función exponencial es la función inversa de la función logarítmica; a continuación, grafica $g(x) = x$ y recuerda a los estudiantes que las funciones inversas, gráficamente, lucen como un reflejo respecto al eje y y les pregunta por el nombre del trazo que queda reflejado. Como nadie le responde, les dice que es la gráfica de la función exponencial.

En la Figura 1f, la profesora emplea la propiedad que $a^0=1$ y utiliza la técnica del corazón para inferir que $\log_a 1=0$. Luego lo conecta con el valor de la tabla (el que había olvidado escribir) para decir que eso siempre es cierto. De igual manera lo generaliza para $a^1=a$ si y solo si $\log_a 1=a$. Finalmente les dice que la siguiente clase van a graficar $f(x) = \log_{(3/4)}(x)$.

Discusión de resultados

Para la primera etapa (1. Un análisis de las configuraciones didácticas en los procesos de instrucción), se realizó una descripción de las configuraciones didácticas del proceso instruccional presentes en el video, basados en el modelo descrito para este fin en Godino, Contreras y Font (2006). Se precisaron los objetos matemáticos presentes, los procesos llevados a cabo, el papel o función del docente en las etapas indicadas, la configuración didáctica, los conflictos semióticos (cuando hubo), los patrones e interacción y las normas presentes en el video.

Para el segundo punto de la etapa 1 y etapas posteriores, se muestran las valoraciones que realizó la profesora de su propia clase. Estas valoraciones son analizadas utilizando la noción de idoneidad didáctica. Conjuntamente, se muestran los indicadores que la docente ha expuesto como importantes de estudiar y se comparan con los hallados en el análisis de la primera etapa, esto con el objetivo de conocer qué elementos ha distinguido en su valoración y cuáles de los que sí aparecen en el video, ella no ha logrado destacar. De los elementos que sí aparecen en su valoración, se quiere conocer si es congruente, tomando como referencia la estimación indicada en la etapa 1 descrita en la metodología.

Elementos de idoneidad presentes en la reflexión de la profesora sobre el proceso de instrucción

Se analizaron los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica de la clase impartida por la profesora de dos maneras. Por una parte, se muestran los elementos que la profesora usó cuando realizó la valoración. Por otra parte, también se señalan los elementos que ha dejado de lado (sin analizar) y que podrían ser de interés para el análisis y valoración de su implementación (señalados en la valoración experta).

Componentes e indicadores de la idoneidad epistémica [IE]

[IE1] definición errónea de logaritmo. Respecto a esta componente la profesora indica que posiblemente por nervios cometió un error al definir la función logaritmo con la base diferente de 0 y mayor que 1. Se puede agregar que este error provocó varios problemas, pues incluso un estudiante trató de usarla para hacer una justificación sobre el dominio cuando realizaba la gráfica de $f(x) = \log_3 x$. Por otra parte, la profesora no logró determinar que cometió un error en el uso de los conceptos de aproximación y valor exacto; incluso argumenta que el valor de la calculadora es el exacto, despreciando o dando por menos las aproximaciones que realizaron en la parte inicial de la clase. Esto provocó que varios estudiantes se preocuparan más por los decimales del redondeo, que por lo que estuvieran resolviendo.

[IE2a] Respecto a las posibles ambigüedades, en la valoración de la docente se indica que trató de hacer una transposición didáctica que tal vez no fue muy adecuada, cuando indicó que probaran valores de t en la calculadora para encontrar una aproximación. [IE2b] Ella se cuestiona qué nunca ha utilizado en su clase el símbolo no existe (\nexists) e indica que no recuerda que lo necesitara hasta ese momento y no lo definió correctamente. Otra ambigüedad que ella sí detecta es la analogía de la asíntota con la “cerca electrificada”, reconoce que quizás pudiera no ser tan adecuada, aunque indica que la volvería a usar [IE2c]. El problema en la analogía o discurso metafórico que utiliza es que no logra explicar todo lo que desea con esta y cada vez que explicaba, tenía que hacer uso de más analogías o metáforas (como “acercarse, pero no tocarla”) para concretar su idea (FONT; BOLITE; ACEVEDO, 2010; FONT et al., 2010).

Una ambigüedad que la profesora no identifica explícitamente fue la que generó la elección de los valores de la tabla y la gráfica que trazó, ya que permite, al menos visualmente, un ajuste logarítmico, pero también parece lineal; incluso un estudiante lo señala (cuando la profesora preguntó al grupo, un estudiante le indicó que la gráfica era una recta). En este sentido ella solo indicó en sus notas escritas que “Debí usar una escala más exacta (a mí no me gusta graficar)” [IE2d]. Otro elemento que no valoró la profesora es que, en varios momentos, habla del modelo de función que están trabajando como si fuese una función exponencial, la cual no es del todo riguroso. Lo correcto es considerarla como un caso particular de una ecuación con parámetros.

[IE3a] Respecto a la riqueza de procesos, la profesora indica que en ciertos momentos se podrán haber trabajado más, como dejar a los estudiantes comprender el uso de 6% o 0,06. Ella es consciente de que dirigió completamente a los estudiantes

para resolver la ecuación “usando una estrategia algebraica”, pero indica que ellos participaron indicando qué acciones podía hacer para simplificar la ecuación a la forma que ella pretendía $a = b^x$ [IE3b]. Otro aspecto que ella indica que no aprovechó fue la discusión que se pudo tener respecto a convertir una expresión $t = 8.77$ años a una expresión más común como años, meses y días [IE3c]. La profesora valora como “genial” el hecho que ellos hicieran la generalización de que en la tabla “solo los negativos” no funcionaban [IE3d].

Existieron varios elementos que no logró identificar. Primero, inicia exponiendo un problema vinculado a un modelo de función y, en la primera indicación, les sugiere a los estudiantes el método que deben usar para buscar una solución (prueba y error); esto convirtió el problema en un ejercicio muy simple y la riqueza del proceso quedó empobrecida. Es importante destacar que para introducir el tema se parte de un modelo para ser aplicado, cuando podría ser más provechoso tener un problema y buscar una forma de modelarlo. Además de esto, los procesos importantes de regulación los realiza completamente la profesora sin considerar los aportes realizados por los estudiantes durante la solución del problema. Enuncia finalmente todas las propiedades y el estudiante prueba números, aplica los algoritmos y rellena valores en la tabla.

Sugerir el ensayo y error y, posteriormente, descalificarlo como método, no solo le restó continuidad a la clase, sino que podría estar sugiriendo implícitamente a los alumnos que este método no es una buena forma de iniciar un problema (contradiendo su propia estructura de la clase). Basta ver que un estudiante llegó a la misma respuesta por aproximación a la que ella dio por respuesta exacta cuando aplicó logaritmos ($t = 8,77$). Otro aspecto relacionado con la riqueza de procesos es que sí hubo algunos indicadores que ella no valoró, pero que son de interés: hubo una conversión de registros (tabla – gráfica), hubo argumentación con los valores negativos dentro de la tabla, se enunciaron las propiedades de logaritmos, se trató la conexión entre la función exponencial y la logarítmica (de forma confusa). Ahora bien, todos estos procesos fueron realizados por la profesora.

[IE4] Respecto a la representatividad, la profesora indica que en los estudiantes es evidente la necesidad que tuvo la aparición de los logaritmos para resolver el problema (más que como un concepto se utilizó como técnica). Ella pudo intentar resolver algunos logaritmos para dar una idea más clara de que es un logaritmo (tal vez mediante un abordaje aritmético).

Aunque el concepto de función logarítmica es tratado como se indica en el Currículo oficial en las indicaciones puntuales, al seguirlo estrictamente se pierde la oportunidad de hablar de otro tipo de situaciones que pueden ser abordadas, como por ejemplo las mencionadas en las indicaciones metodológicas del Programa de Estudio (COSTA RICA, 2012): 1) Utilizar recortes de revistas, periódicos y datos estadísticos (p. 421); 2) Historia de los logaritmos (p. 426); 3) Intensidad de sonido (p. 426); Escala Richter (p. 426); 4) Ley de Newton de enfriamiento (p. 426); 5) Medida de pH (p. 427); 6) Modelo de interés compuesto (p. 427) (el que la docente utilizó). Respecto a las representaciones, la docente sí muestra distintas formas de representar al objeto matemático (tabular – simbólicas y gráfica).

Componentes e indicadores de la Idoneidad Cognitiva [IC]

[IC1] conocimientos previos. La docente señala que lo primero que hizo fue retomar lo que explicó en la clase anterior pues lo considera “conveniente siempre”. Indica que los estudiantes dominan los conocimientos de dominio rango y ámbito, lo cual es una suposición equivocada, por las evidencias luego mostradas. Respecto a la adaptación curricular a las diferencias individuales no realizó actividades de refuerzo ni de ampliación (claro está que esto deriva del manejo del tiempo que hizo versus el tiempo disponible). Respecto al aprendizaje de los estudiantes no hay suficiente información para asegurar que lo hubo, pero se observa en el video que la profesora va resolviendo las dificultades de los alumnos.

[IC3] aprendizaje. La profesora indica respecto a los logaritmos que “no es posible deducir ese conocimiento. Creo que solamente se puede mostrar su utilidad”. Es posible que exista una relación entre lo que ella piensa sobre el aprendizaje alcanzado, con que no se haya presentado una alta idoneidad epistémica. Esto puede deberse a las indicaciones puntuales del Programa de Estudios, ya que sugieren asumir el modelo como verdadero y aplicarlo a una situación que se sugiere como real.

[IC4] demanda cognitiva. El único logro cognitivo que valora que se obtuvo fue poder leer la gráfica. Cabe indicar que fue la profesora quien señaló que este era un conocimiento previo.

Componentes e indicadores de la idoneidad interaccional [II]

[II1] Interacción docente-discente. Cuando la profesora quería mostrar la forma de manejar el modelo de forma algébrica, repetidamente consultaba a los estudiantes sobre lo que habían podido observar cuando trabajaban en grupos, lo cual ella valora como bueno por facilitar la inclusión de los alumnos ya que permitió que ellos narraran lo que habían trabajado. Esta valoración que ella señala como positiva es discutible, pues los comentarios de los estudiantes se basan en lo que ella les había respondido, cuando le habían consultado sobre la resolución (en cierta manera sugirió la respuesta y no hay evidencias de que los estudiantes hayan construido esos conceptos).

La docente indica que no sabe si la forma en que ignoró a los estudiantes que decían respuestas erróneas fue incorrecta, pero indica que lo que decidió fue lanzar las preguntas a las personas que ya ella sabía que habían resuelto el problema (para obtener la respuesta que ella esperaba) [II1a].

Señala que su clase tuvo un “desarrollo natural” pese a la filmación [II1b]. Aunado a esto, indica que sí tuvo que “lidiar” varias veces con ellos, pues ese grupo es particularmente indisciplinado. También agrega que valora muy positivamente el hecho de que los estudiantes estén tratando de responder incluso “con vocabulario adecuado” [II1c]. No obstante, indica que es consciente que, si bien gran parte de su clase ha sido magistral, los estudiantes hacen el trabajo que se les propuso [II1d].

Respecto al trato hacia los alumnos indica que valora como importante que se dirigiera a ellos de forma respetuosa y siempre los motivó a mejorar, y agrega que, aun así,

se describe a sí misma como una profesora “completamente dominante y controladora (exijo atención siempre)” [II1e].

Respeto a los elementos que no ha valorado, se puede indicar que su gestión de aula ha conllevado que haya muy poca argumentación de parte de los alumnos, y las argumentaciones erróneas las ha ignorado (lo cual se puede interpretar como una evidencia de exclusión a quienes han intervenido y no han llegado a la respuesta que la profesora espera). El otro aspecto es que, en casi todas las ocasiones, les resuelve completamente las dificultades o dudas desde el primer momento.

Pese a que no lo ha considerado como valioso, sí ha facilitado la interacción entre los estudiantes al hacerlos trabajar en pequeños grupos. Si bien la profesora los organizó para que trabajasen en grupo, no promovió la autonomía porque les facilitó el modelo para solucionar el problema. Por último, no hay evidencia explícita de haber planteado una evaluación formativa durante su clase.

Componentes e indicadores de la Idoneidad Mediacional [IM]

[IM1] Respecto a los recursos, la docente llegó a la conclusión que algo que no permitió la fluidez de la clase fue que los estudiantes no sabían usar bien la calculadora, aunque expresa que el uso del recurso es una buena opción; incluso así, por indicaciones de la docente, los estudiantes la usaron como caja negra (LINDSAY, 1975) para calcular logaritmos, sin comprender qué ocurre. Asimismo, ella indica que el uso de la pizarra no fue el adecuado (por ejemplo, con la tabla y la gráfica) y apunta a que tal vez debió usar un software para mostrar la idea que tenía: “me hubiera permitido más flexibilidad (mostrar asíntotas, intersecciones, inversa)” [IM1a].

En el caso del espacio del aula, no hay un exceso de alumnos ni problemas de espacio físico. La profesora indica que adecuó efectivamente el tiempo a las actividades planeadas [IM1b].

Componentes e indicadores de la Idoneidad Afectiva o Emocional [IA]

[IA2] Actitudes. La profesora no realiza ninguna valoración sobre las necesidades, actitudes y emociones de los estudiantes, pero considera muy valioso el hecho de que los estudiantes están motivados, y de que expliquen sus respuestas y muestren interés por verificar su trabajo; respecto a esto ella indica que cree haber convencido a los estudiantes de la importancia de este tema [IA2]. Aunque los estudiantes trabajaron, la actividad por sí misma no parece especialmente motivadora para los alumnos; En cambio, la docente sí promueve la integración de los alumnos y escucha sus argumentos (aun cuando estos sean los que ella misma sugirió antes).

Componentes e indicadores de la Idoneidad Ecológica [IEC]

[IEC1] La profesora indica que tuvo que hacer una modificación / adaptación del modelo que se sugiere en el Programa de Estudios. La experiencia en los otros grupos

en los que trabajó antes fue que, tal como estaba formulado, generaba un obstáculo por la cantidad de cálculos que debían realizar los alumnos, por lo que propuso el problema con los datos de tiempo en años. Tal vez el asunto que se debe pensar es que se siguieron completamente las orientaciones curriculares sin un análisis más profundo de lo que se puede lograr con esas recomendaciones puntuales. Respecto a las conexiones intra e interdisciplinarias, la profesora valora que conectó la materia con la función exponencial [IEC2], pero no se ha percatado que ha dejado de lado las conexiones con otras disciplinas.

A pesar de que no lo apreció, el tema que se desarrolla parece tener una utilidad sociolaboral pues es contenido útil para este contexto, aunque tal vez no en este momento. No se evidencia ninguna innovación respecto al currículo (pues sigue todo lo indicado ahí) pero sí hay una modificación en la forma tradicional de enseñar cuando trata de incluir la participación de estudiantes.

Aunque se han expuesto aquí varios factores que pueden ser elementos a tener en cuenta en un rediseño, también se debe constatar que la gestión de la clase fue realizada responsablemente por la docente escogiendo las opciones que consideró adecuadas teniendo en cuenta el tiempo que tenía para introducir este tema. Esto concuerda con la visión de Huang y Li (2009), señalada en el apartado de *Introducción*.

Conclusiones

Respecto al objetivo planteado en esta investigación, se logró evidenciar que la docente utiliza para valorar su propia actividad con mayor frecuencia, elementos relacionados con los criterios de idoneidad epistémica [IE] e interaccional [II] y las otras valoraciones que aparecen en menor medida han podido ser clasificadas con componentes e indicadores de los otros criterios de idoneidad didáctica [IC], [IM], [IA], [IEC]. Esto evidencia, en primera instancia, que el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos (GODINO; BATANERO; FONT, 2007) representa una base teórica apropiada para el abordaje y estudio de este tipo de investigación, y con el uso adecuado de los criterios, componentes e indicadores propuestos por Font (2015) para la noción de idoneidad didáctica, fue posible comprender y clasificar las valoraciones que la docente realizó.

En cuanto a la idoneidad epistémica [IE], la profesora logró determinar el error en la definición de la función logarítmica (que le fue evidente al ver el video), pero aun revisando el video varias veces no se ha percatado del problema relacionado con los conceptos de aproximación y exactitud. Una posible explicación es que lo asume como parte del conocimiento común de los estudiantes, pero fue cierto que esto le generó varios problemas, e incluso, desestimar una respuesta correcta de un estudiante antes de enunciar los logaritmos. De igual manera, las ambigüedades más relevantes no las ha podido identificar.

El caso que más llama la atención en la auto-valoración son los indicadores asociados a la riqueza de procesos [IE3] pues, aun después de las revisiones, no ha logrado percibir que dos aspectos fueron determinantes para su clase: 1) seguir las indicaciones puntuales del Programa de Estudios al pie de la letra y en consecuencia, adoptar un modelo como cierto, enunciar un problema, y después, asegurar que el modelo resuelve completamente

el problema; 2) sugerir a los estudiantes casi de manera inmediata el método por el cual podían resolver el problema.

Sobre el primer aspecto acabado de comentar, la forma en que la profesora desarrolló el tema no dio la oportunidad de crear un modelo desde un problema real (podría haberse creado un modelo más sencillo a partir de una situación más cercana a los estudiantes que involucrara exponenciales). Si bien el Programa de Estudios en las indicaciones puntuales (transcritas en el Cuadro 1) sugiere que “[...] para despertar el interés y la participación, se propone usar problemas en contextos reales que provoquen la construcción o uso de modelos” (COSTA RICA, 2012, p. 36) y, además que, “[...] el espíritu de la modelización reside en la identificación, manipulación, diseño y construcción de modelos matemáticos sobre situaciones auténticas del entorno” (p. 31), podría ser necesario repensar o explorar con mayor profundidad si el uso de un modelo ya definido es un escenario valioso para iniciar el concepto de función logarítmica, o si más bien, la construcción de un modelo simple podría generar o activar otros procesos más relevantes (más allá de la prueba y error, y de introducir datos en la calculadora sin entender su significado). La elección mencionada es parte de lo señalado por (MASON, 2002, 2017) y abordada en el marco teórico. Esta situación también puede estar relacionada con el criterio afectivo al estar enlazado con las creencias de los estudiantes hacia las matemáticas, principalmente en la forma en que se desarrollan las matemáticas [IA].

Sobre el segundo aspecto, en el cual la profesora no considera esta sugerencia como relevante, hay que resaltar que condicionó totalmente el trabajo de los estudiantes, llevándolos a realizar la estrategia que quería.

Respecto a los elementos que valoró y que se relacionan con la idoneidad interaccional [II], hay que resaltar que para la profesora fue explícito e intencionado que su clase presentase muchas características de una clase magistral. No obstante, trata de que los estudiantes realicen algunas actividades y de escucharlos (en muchos casos). Al ser una clase de este tipo, es difícil que la docente pueda utilizar las respuestas incorrectas de los estudiantes (gestión de errores), pues no están en un espacio de construcción sino en un espacio altamente dirigido. La profesora, según lo grabado en video y lo que comentó, optó por ignorar algunas respuestas erróneas, lo cual podría ser consecuencia del estilo de la clase o un elemento de interés en la idoneidad afectiva [IA].

Algunas implicaciones para el desarrollo de la función docente y cuestiones abiertas

A través del trabajo emprendido, se pueden ofrecer herramientas que podrían ser relevantes para los docentes que deseen evaluar su propia práctica docente. Además, la metodología y el marco de referencia de esta investigación podrían servir de estrategia para la autoevaluación sistemática de lo que ocurre en el aula. Los resultados de esta investigación concuerdan con otras investigaciones (BREDA; FONT; LIMA, 2015) que afirman que si el profesor logra hacer suyo un marco conceptual como el de idoneidad didáctica, con sus componentes e indicadores, mediante un instrumento tipo rúbrica que lo haga operativo (como el de FONT, 2015), entonces podría contar no solo con una estrategia o protocolo para auto valorarse, sino que también obtendría elementos que le permitan orientar la búsqueda de recursos para mejorar su conocimiento en matemáticas,

pedagogía y didáctica de las matemáticas, así como incrementar sus habilidades para identificar y reflexionar sobre situaciones en la instrucción matemática. También puede servir de apoyo para la capacitación de profesores que deseen auto valorarse.

Finalmente, este tipo de autovaloración puede ser un excelente recurso, pero es solo una herramienta que debe ser triangulada con valoraciones por sus pares (por ejemplo, al estilo del Estudio de la lección), por sus supervisores o asesores, o por las valoraciones de sus propios estudiantes, quienes también aportarían información valiosa sobre lo que está ocurriendo en el aula.

Referencias

BORKO, Hilda et al. Using video representations of teaching in practice-based professional development programs. **ZDM Mathematics Education**, Berlín, v. 43, n. 1, p. 175-187, 2011. <https://doi.org/10.1007/s11858-010-0302-5>.

BREDA, Adriana; FONT, Vicenç; LIMA, Valderez. A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, São Paulo, v. 8, n. 2, p. 1-41, 2015. Disponible en: <<http://www.pgsskroton.com.br/seer/index.php/jieem/article/download/2364/2874>>. Acceso en: 18 jul. 2017.

BREDA, Adriana; FONT, Vicenç; PINO-FAN, Luis. Criterios valorativos y normativos en la didáctica de las matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 255-278, 2018. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>.

BREDA, Adriana; FONT, Vicenç; PINO-FAN, Luis. Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, London, v. 13, n. 6, p. 1893-1918. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a>.

CLARKE, David et al. Addressing the challenge of legitimate international comparisons: lesson structure in the USA, Germany and Japan. In: CLARKE, David et al. (Ed.). **Making connections: comparing mathematics classrooms around the world**. Rotterdam: Sense, 2006. p. 23-46.

COLES, Alf. Mathematics teachers learning with video: the role, for the didactician, of a heightened listening. **ZDM Mathematics Education**, Berlín, v. 46, n. 2, p. 267-278, 2014. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0541-3>.

COSTA RICA. Ministerio de Educación Pública. **Programas de estudio matemáticas: educación general básica y ciclo diversificado**. San José: MEP, 2012.

FONT, Vicenç. **Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática**. Barcelona: Universitat de Barcelona, 2015. Manuscrito no publicado. Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática, Universitat de Barcelona.

FONT, Vicenç; BOLITE, Janete; ACEVEDO, Jorge Iván. Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 75, n. 2, p. 131-152, 2010. <http://www.dx.doi.org/10.1007/s10649-010-9247-4>.

FONT, Vicenç; PLANAS, Nuria; GODINO, Juan Díaz. Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. **Infancia y Aprendizaje**, London, v. 31, n. 1, p. 89-105, 2010. <https://doi.org/10.1174/021037010790317243>.

FONT, Vicenç et al. The object metaphor and synecdoche in mathematics classroom discourse. **For the Learning of Mathematics**, Montreal, v. 30, n. 1, p. 15-19, 2010. Disponible en: <<http://www.jstor.org/stable/20749432>>. Acceso en: 01 dic. 2016.

GODINO, Juan Díaz; BATANERO, Carmen. Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 6th, 2009, Puerto Montt. **Actas...** Puerto Montt: Universidad de Los Lagos, 2009. p. 1-24.

GODINO, Juan Díaz; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM Mathematics Education**, Berlín, v. 39, n.1-2, p. 127-135, 2007. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>.

GODINO, Juan Díaz; CONTRERAS, Angel; FONT, Vicenç. Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactiques des Mathematiques**, Grenoble, v. 26, n. 1, p. 39-88, 2006. Disponible en: <http://www.academia.edu/download/46706517/analisis_procesos_instruccion.pdf>. Acceso en: 05 febr. 2017.

GODINO, Juan Díaz et al. Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 90-113, 2017. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>.

HUANG, Rongjin; LI, Yeping. Pursuing excellence in mathematics classroom instruction through exemplary lesson development in China: a case study. **ZDM Mathematics Education**, Berlín, v. 41, n. 3, p. 297-309, 2009. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0165-1>.

ISODA, Masami et al. **Japanese lesson study in mathematics: Its impact, diversity and potential for educational improvement**. Singapore: World Scientific, 2007. <https://doi.org/10.1142/6339>.

KAISER, Gabriele et al. About the complexities of video-based assessments: theoretical and methodological approaches to overcoming shortcomings of research on teachers' competence. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan, v. 13, n. 2, p. 369-387, 2015. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9616-7>.

KLEINKNECHT, Marc; SCHNEIDER, Jurgen. What do teachers think and feel when analyzing videos of themselves and other teachers teaching? **Teaching and Teacher Education**, Orlando, v. 33, n. 5, p. 13-23, 2013. <http://dx.doi.org/10.1016/j.tate.2013.02.002>.

LEWIS, Catherine; TSUCHIDA, Ineko. A lesson is like a swiftly flowing river: how research lessons improve Japanese education. **American Educator**, Washington, DC, v. 22, n. 4, p. 12-17, 1998. Disponible en: <<http://www.aft.org/sites/default/files/periodicals/Lewis.pdf>>. Acceso en: 10 en. 2017.

LINDSAY, Robert. Black box numeracy. **Mathematics in School**, London, v. 4, n. 6, p. 26-28, 1975. Disponible en: <<http://www.jstor.org/stable/30211460>>. Acceso en: 17 dic. 2016.

MASON, John. Probing beneath the surface of experience. In: SCHACK, Edna O.; FISHER, Molly H.; WILHELM, Jennifer A. (Ed.). **Teacher noticing: bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks**. Cham: Springer, 2017. p. 1-17. https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5_1.

MASON, John. **Researching your own practice: the discipline of noticing**. London: Routledge Falmer, 2002.

MONTIEL, Mariana et al. Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 72, n. 2, 139-160, 2009. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9184-2>.

MORALES, Yuri; FONT, Vicenç. Análisis de la reflexión presente en las crónicas de estudiantes en formación inicial en educación matemática durante su periodo de práctica profesional. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 19, n. 1, p. 122-137, 2017. Disponible en: <<http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/2975/2280>>. Acceso en: 07 jun. 2017.

MORALES-LÓPEZ, Yuri. Costa Rica: The preparation of mathematics teachers. In: RUIZ, A. (Ed.). **Mathematics teacher preparation in Central America and the Caribbean: the cases of Colombia, Costa Rica, the Dominican Republic and Venezuela**. Cham: Springer, 2017. p. 39-56. https://doi.org/10.1007/978-3-319-44177-1_3.

POCHULU, Marcel; FONT, Vicenç. Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, DF., v. 14, n. 3, p. 361-394, 2011. Disponible en: <<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33520716005>>. Acceso en: 10 en. 2017.

ROSAEN, Cheryl et al. Noticing noticing: how does investigation of video records change how teachers reflect on their experiences? **Journal of Teacher Education**, Michigan, v. 59, n. 4, p. 347-360, 2008. <https://doi.org/10.1177/0022487108322128>.

SECKEL, María José. **Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática**. 2016. 340 p. Tesis (Doctorado en Educación) – Facultat de Formació del Professorat, Universitat de Barcelona, Barcelona, 2016.

STAKE, Robert E. **Investigación con estudio de casos**. Madrid: Morata, 1995.

YOSHIDA, Makoto. **Lesson study: a case study of a Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development**. 1999. 504 p. Tesis (Doctorado) – Department of Education, University of Chicago, Chicago, 1999.

YOSHIDA, Makoto. Mathematics lesson study in the United States: current status and ideas for conducting high quality and effective lesson study. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, Bradford, v. 1, n. 2, p. 140-152, 2012. <http://dx.doi.org/10.1108/20468251211224181>.

Recibido en: 22.12.2017
Revisiones en: 14.03.2018
Aprobado en: 25.04.2018

Yuri Morales-López es máster por la Universidad Nacional. Profesor titular en la Universidad Nacional, Heredia Costa Rica.

Vicenç Font Moll es doctor por la Universidad de Barcelona. Profesor titular en la Universidad de Barcelona.