

O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica*

The hermetic teaching of mathematics: a critical view based on semiotic representation registers

Mérciles Thadeu Moretti**
Afrânio Austregésilo Thiel***

Resumo: Neste trabalho discutimos, à luz da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, o significado do ensino de matemática hermético, fechado sobre si mesmo, em relação ao modo como os registros semióticos são utilizados. Constata-se que este ensino, criticado por pesquisadores da Educação Matemática, se baseia em registros que provêm, geralmente, de um único sistema semiótico e, mesmo quando trata de mais de um sistema, não considera as possibilidades de articulação semiótica que pressupõe o reconhecimento simultâneo dos elementos semióticos que podem estar relacionados em cada sistema considerado. Veremos, ainda, como esta situação pode ser superada com um ensino que priorize, de fato, a articulação entre registros tendo por base a ideia de aprendizagem em matemática de Duval.

Palavras-chave: Ensino hermético. Registros de representação semiótica. Tipos de registros semióticos.

Abstract: This paper proposes a discussion, under the conception of the semiotic representation registers by Raymond Duval, about the meaning of hermetic teaching of mathematics, closed in itself, in relation to the way the semiotic registers are used. This teaching method, criticized by mathematical education researchers, is seen as based on registers that usually come from a single semiotic system, and even when more than one system are employed, these do not consider the possibilities of semiotic articulation which assumes the simultaneous recognition of semiotic elements that might be related in each system under analysis. Another discussion proposed is how this situation can be overcome with a teaching practice which really prioritizes the articulation between registers based on Duval's idea of mathematics learning.

Keywords: Hermetic teaching. Semiotic representation registers. Types of semiotic registers.

* Este trabalho conta com os apoios da Capes e CNPq.

** Professor da Universidade Federal de Santa Catarina. E-mail: <mthmoretti@gmail.com>

*** Professor do Instituto Federal Catarinense, Camboriú. E-mail: <afraniothiel@ifc-camboriu.edu.br>

A ciência é ao mesmo tempo representação e comunicação e, com este duplo título, inseparável de um simbolismo.

Granger (1979, p. 21)

Introdução

Em matemática, muito mais do que qualquer em outra disciplina, a variedade dos sistemas de representação é fundamental não só para a sua aprendizagem como também para a criação de novos conceitos. Em relação à criação de novos conceitos, Boyer (1974, p. 70) chega a afirmar que “Foram as deficiências das notações algébricas que mais fortemente operaram para impedir que os gregos construíssem uma verdadeira geometria de coordenadas”. Em grande parte, essa geometria conheceu um grande impulso, mais de mil anos mais tarde, com a criação da geometria cartesiana por Descartes. Granger (1979, p. 22) também alerta para o papel decisivo do simbolismo no discurso científico em detrimento do papel da língua natural, o qual tende a diminuir.

Raymond Duval observa, desde as suas primeiras publicações em 1988 (traduzidas e referenciadas como Duval (2011a, 2012a, 2012b)), para a importância fundamental das representações semióticas para a aprendizagem matemática. Se *semiose* significa a produção ou a apreensão de uma representação semiótica, e *noesis*, a apreensão conceitual de um objeto, Duval (1995, p. 5) é enfático em afirmar que não existe *noesis* sem *semiose*, que dizer, sem o recurso de uma pluralidade ao menos potencial de sistemas semióticos, o que implica a coordenação pelo próprio sujeito.

As representações semióticas não têm importância somente para a aprendizagem matemática. Elas saíram do âmbito da matemática, uma fonte fantástica de criação de representações, saíram também dos manuais escolares e foram povoar diversas *midias* populares com a função principal de comunicar ideias. É o caso, por exemplo, dos gráficos nos jornais e na televisão. Mesmo para esse tipo de situação, é preciso que os alunos estejam preparados para esta “leitura do mundo”.

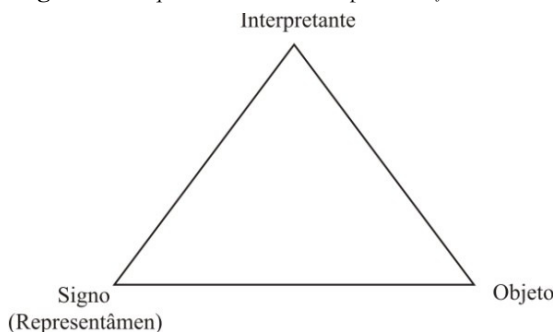
Neste artigo, analisamos essas representações semióticas à luz da teoria de Raymond Duval. Para tanto está dividido em três partes: a primeira delas trata dos signos em diversos autores em que Duval busca inspiração para criar a noção de registros de representação semiótica para a aprendizagem matemática; a segunda parte trata dos registros de representação e concepção de aprendizagem matemática em Duval em que a variedade e o trânsito entre registros são centrais na sua teoria de aprendizagem matemática; na terceira parte, procuramos caracterizar os diferentes tipos de registros de representação semiótica: é aqui

que a reflexão central do artigo, sobre o ensino repetitivo e hermético, bastante comum hoje em dia na escola, toma corpo e mostra a sua relevância à discussão.

Dos signos aos registros de representação semiótica em Duval

Peirce (2000) define o signo em uma relação triádica como esquematizado na figura 1 a seguir:

Figura 1 - Esquema triádico da representação em Peirce



Fonte: Elaborado pelos autores a partir de Peirce (2000).

Para este autor,

Um signo, ou *representâmen*, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria na mente da pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo assim criado denomino *interpretante* do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, o seu *objeto*. Representa esse objeto não em todos os seus aspectos, mas com um tipo de ideia que eu, por vezes, denominei *fundamento* do *representâmen*. (PEIRCE, 2000, p. 46, grifo do autor).

O signo funciona como mediador entre o objeto e o interpretante. Da relação do signo com o seu objeto, extrai-se de Peirce (2000, p. 51-54) os tipos de signos seguintes:

- ícone - quando há relação de semelhança entre o signo (*representâmen*) e o objeto representado. Quando não há esta semelhança, o signo se chama símbolo;
- índice - quando existe uma relação entre um fato observado e a sua causa.

Os ícones são signos que se referem ao seu objeto por certa similaridade. Quando não há esta similaridade, como, por exemplo, o som da palavra

“caneta”, que não guarda nenhuma semelhança com o objeto caneta, nos referimos ao símbolo. A metáfora “Onde há fumaça há fogo” é um símbolo, mas apenas o termo “fumaça” é índice de fogo. O signo será índice quando há uma relação entre um fato observado e uma causa. Assim, fumaça pode indicar fogo e um grito a dor.

A aprendizagem matemática, em geral, trata de símbolos, como, por exemplo, o conceito de função, um problema formulado na língua natural, etc. Em relação à representação triádica de Peirce, escreve Duval (1999, p. 15-16):

Observemos que esta definição minimalista vale também para as imagens mentais quanto para os signos (os símbolos matemáticos) ou para as fotografias e para as palavras da língua! Esta definição em razão de sua generalidade, não faz diferença entre o que é mental (por exemplo, lembrar-se de...) e o que é material (fotografias tomadas com ajuda de autofoco).

A definição de signo em Peirce oferece a vantagem de que a representação possa ser distinguida do objeto representado.

Diferente de Peirce, que procurou estabelecer uma classificação geral para os signos, Ferdinand de Saussure em seu *Cours de Linguistique Générale*, publicado postumamente em 1916, preocupou-se com o signo linguístico e o define como uma entidade inseparável diádica que põe em oposição o significado (um conceito, uma imagem mental) do significante (imagem acústica):

A língua é também comparável a uma folha de papel: o pensamento é o anverso e o som o verso; não se pode cortar um sem cortar, ao mesmo tempo, o outro; assim tampouco, na língua, se poderia isolar o som do pensamento, ou o pensamento do som. (SAUSSURE, 2008, p. 131).

Do trabalho de Saussure se pode destacar ainda um aspecto fundamental, a importância do sistema no qual o signo é produzido:

[...] é uma grande confusão considerar um termo simplesmente como a união de certo som com um certo conceito. Defini-lo assim seria isolá-lo do sistema do qual ele faz parte; seria acreditar que é possível começar dos termos e construir o sistema fazendo a soma deles, quando pelo contrário, cumpre partir da totalidade solidária para obter, por análise, os elementos que encerra. (SAUSSURE, 2008, p. 132).

Tomando as ideias de Saussure (2008) e Peirce (2000), propomos a figura 2, a seguir, como um esquema triádico que leva em conta os polos constitutivos de toda representação do modo como Duval (2011c, p. 21-39) concebe.

Figura 2 - Esquema constitutivo dos polos da representação



Fonte: Figura proposta tendo por base a ideia de Duval (1993, 1995, 1996, 2011c) sobre representação.

No esquema da figura 2, observa-se que o signo se reveste, como na concepção de Saussure (2008, p. 132), de uma entidade que possui um conteúdo próprio (um conceito), que não é o mesmo do objeto representado, e uma forma que permite levar em conta o sistema no qual ele foi produzido.

Nesta apresentação da representação triádica se tem:

- como em Saussure, a analogia da folha do papel que congrega de forma inseparável, de um lado, o conteúdo da representação e, do outro lado, a forma da representação;
- o objeto representado que não é o mesmo do conteúdo do registro.

Para evitar confusão nas denominações dos signos, Duval prefere usar o termo registro para os signos com a mesma referência em um sistema semiótico. O termo registro já fora utilizado por Descartes, em 1637, em seu livro *Geometria* para distinguir a escrita algébrica de sua forma de representação figurar. O termo em francês significa também utilizar a língua de diferentes maneiras para se expressar. (DUVAL, 2004, p. 44).

Há ainda, neste esquema, uma questão que precisa ser mencionada: a noção de referência em Frege que é levantada por Duval. Um artigo de Frege (1971)¹ fez com que se notasse que expressões, por exemplo, como “a estrela da manhã” e “a estrela da tarde” que embora tenham a mesma referência, o planeta Vênus, possuem sentidos diferentes, mostrou-se importante para o ensino da matemática como assinala Duval (2012a, p. 99, grifo do autor):

¹ *Sentido e denotação*, publicado em *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* (100), 1892. (Nota de rodapé do tradutor em Frege (1971)).

A distinção entre sentido *Sinn* e referência *Bedeutung* mostrou-se ser uma das mais fecundas em todos os domínios nos quais a relação entre conceito e idéias efetua-se através da manipulação de signos, símbolos ou expressões. Esta distinção induziu a separar com clareza a significação, que depende do registro de descrição escolhido, da referência que depende dos objetos expressos ou representados.

A distinção entre sentido e referência está estreitamente ligada ao princípio da substituição que é essencial nos procedimentos de cálculo ou de dedução: duas expressões com a mesma referência podem ser trocadas uma pela outra, em uma frase ou fórmula, sem que o valor da verdade mude. (DUVAL, 2012a, p. 99).

Por exemplo, ao efetuar $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, podemos fazê-lo da forma seguinte:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Esta mesma operação poderia ser feita ainda de outra forma, mantendo-se a mesma referência:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0,5 + 0,25 = 0,75$$

Na primeira solução, manteve-se a mesma rede semiótica de representação, enquanto que, no segundo caso, há mudança de sistema de representação: $1/2$ e $2/4$ são as estrelas da tarde e da manhã de Frege referidas anteriormente da mesma forma que $1/4$ e $0,25$.

Para um mesmo objeto de referência, mudança na forma da representação implica também mudança de conteúdo da representação, mas não necessariamente de registro. O que se quer dizer com esta mudança de conteúdo é em relação à informação que de modo mais imediato o registro apresenta por conta da sua forma – é o conteúdo explícito. Por exemplo, por um processo que se costuma chamar de “complementação do quadrado” se pode transformar a parábola na forma $y = 2x^2 - 4x + 6$ à forma $(y - 4) = 2(x - 1)^2$. O que se fez, neste caso, foi mudar o seu conteúdo explícito sem mudar a forma da representação: não houve mudança de registro da parábola. Na forma da parábola $(y - 4) = 2(x - 1)^2$, por exemplo, podem-se perceber, imediatamente, as coordenadas do vértice que é $(1, 4)$. Já a parábola $y = 2x^2 - 4x + 6$ em sua forma algébrica e em sua forma cartesiana, como mostrado na figura 3 mais adiante, são exemplos de registros distintos do mesmo objeto matemático.

Duval (2011b, p. 15) define duas operações semióticas: o tratamento e a conversão. O tratamento ocorre quando se opera mantendo-se no mesmo

sistema semiótico de representação ou no mesmo registro - é uma operação intrarregistro. A operação de conversão se dá entre registros, entre elementos de sistemas semióticos distintos, como, por exemplo, as transformações entre a parábola $y = 2x^2 - 4x + 6$ e o gráfico no plano cartesiano da figura 3 mais adiante.

Os registros de representação semiótica e aprendizagem matemática

A operação de conversão está na base da hipótese fundamental de aprendizagem de Duval (1993, p. 51): “A compreensão (integrativa) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação e esta coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão.”

Sem negligenciar a operação de tratamento, é a conversão que mais contribui para a aprendizagem matemática, ou seja, o ensino de matemática, na concepção de Duval, deve priorizar a coordenação de registros de sistemas semióticos diferentes. A diversidade de registros e a capacidade de passagem de um para outro são o que fundamentam a ideia de aprendizagem matemática em Duval.

Fazer mudança entre representações traz à tona um fenômeno denominado por Duval de congruência semântica que procura medir o grau de transparência entre representações de um mesmo objeto referenciado. Tal fenômeno se torna mais agudo na operação de conversão por se tratar de uma operação entre registros diferentes, uma vez que, para que a conversão possa ser efetuada ou o objeto seja reconhecido em dois sistemas distintos, é necessário também *conhecer as regras de funcionamento semiótico em cada um desses sistemas*.

Uma classificação de registros semióticos

Duval (2004) divide os sistemas semióticos em quatro grandes grupos: discursivos e não-discursivos versus plurifuncionais e monofuncionais, combinados conforme mostra o quadro 1 a seguir (inclui-se, neste quadro, a denominação das quatro células).

Quadro 1 - Tipos de registros semióticos

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
<p align="center">REGISTROS PLURIFUNCIONAIS</p> <p align="center">(os tratamentos não são algoritmizáveis)</p>	<p>Célula 11</p> <p>Língua natural: associações verbais (conceituais); descrição, definição, explicação;</p> <p>Raciocínio: argumento a partir de observações, de crenças...; dedução válida a partir de definição ou de teoremas</p>	<p>Célula 12</p> <p>Figuras geométricas planas ou em perspectiva (configurações de formas nas dimensões 0, 1, 2, 3); Apreensão operatória e não somente perceptiva; construção com instrumentos; modelização de estruturas físicas (ex. cristais, moléculas...)</p>
<p align="center">REGISTROS MONOFUNCIONAIS</p> <p align="center">(os tratamentos são principalmente algoritmizáveis)</p>	<p>Célula 21</p> <p>Sistema de escrita: - numéricas (binária, decimal, fracionária...); - algébricas; - simbólicas (línguas formais); Cálculo literal, algébrico, formal...</p>	<p>Célula 22</p> <p>Gráficos cartesianos (visualização de variações) mudanças de sistema de coordenadas; interpolação, extrapolação.</p>

Fonte: Duval (2004, p. 52) com a inclusão da denominação das quatro células.

Cada uma dessas células pode conter outros subsistemas semióticos, e as operações entre eles, mesmo que se mantenham em uma mesma célula, podem ser consideradas como conversões. O conjunto dos números reais é um subsistema semiótico que pertence à Célula 21. O conjunto dos números racionais, que está contido no conjunto dos reais e que pertence a esta mesma célula, pode ser considerado outro subsistema dependendo do tipo de objeto matemático em jogo. Por exemplo, na representação da reta numérica, há diferenças importantes se se considerarem os reais ou os racionais. Na representação da reta numérica pode estar em jogo a diferença entre a noção de continuidade e densidade: os reais são contínuos e densos, e os racionais são densos, mas não são contínuos. Este problema, sobre a representação da reta numérica foi levantado por Duval (2012a, p. 106-109) para caracterizar o alto grau de não congruência semântica entre a representação dos reais na reta numérica e o conjunto dos reais.

No conjunto dos racionais podemos diferenciar ainda os decimais dos fracionários, uma vez que as operações básicas e a relação de ordem têm características cognitivas bem distintas em cada uma dessas formas de representação dos racionais.

A hipótese fundamental de aprendizagem trata principalmente da conversão entre registros de células diferentes. São, principalmente, as conversões entre registros das Células 11 e 12 que se tratam na aprendizagem em geometria. Em Duval (2012b) encontramos discussão dessa situação. Na aprendizagem da aritmética ou álgebra, as conversões se dão principalmente entre registros das Células 11 e 21; exemplo desta situação pode ser encontrada em Brandt (2005) sobre a aprendizagem do sistema de numeração quando trata do trânsito na língua natural e no modo algébrico.

Apresenta-se, a seguir, uma discussão de ensino de esboço de curvas que procura levar em conta a articulação entre registros das Células 21 e 22.

A conversão entre gráfico e equação

Na aprendizagem do esboço de curvas no cálculo, as conversões acontecem entre as Células 21 e 22; em Duval (2011a) encontramos uma abordagem desse assunto para a reta no Ensino Fundamental e, em Moretti (2003), Moretti; Ferraz e Ferreira (2008) e Moretti e Luiz (2010) a abordagem foi ampliada para outras funções (ou equações) e níveis de ensino. Os registros da Célula 11 poderão também fazer parte do estudo da conversão entre equação e gráfico a partir de problemas e questões como, por exemplo, aquele elaborado em Moretti e Luiz (2010, p. 534) para o Ensino Superior com o uso de novas tecnologias.

Duval (2011a) lança as ideias fundamentais para a atividade de conversão entre equação e gráfico. Ele toma a reta para fundamentar a proposta de conversão que leva em conta a *interpretação global de propriedades figurais*. A operação de conversão na proposta de aprendizagem de registros semióticos de Duval se dá nos dois sentidos: da equação para o gráfico e do gráfico para a equação.

Os elementos dos sistemas semióticos envolvidos, equação e representação cartesiana são apresentados por Duval no quadro 2 a seguir:

Quadro 2 - Valores e variáveis visuais para $y = ax + b$ no plano cartesiano

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes	
Sentido da inclinação	ascendente descendente	coeficiente > 0 coeficiente < 0	ausência de sinal presença do sinal –
Ângulo com os eixos	partição simétrica ângulo menor ângulo maior	coefic. variável = 1 coefic. variável < 1 coefic. variável > 1	não há coefic. escrito há coefic. escrito há coefic. escrito
Posição sobre o eixo	corta acima corta abaixo corta na origem	acresc. constante subtrai-se constante sem correção aditiva	sinal + sinal – ausência de sinal

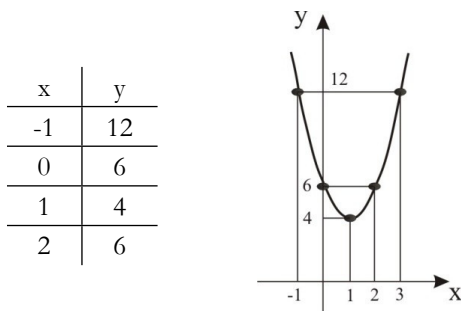
Fonte: Duval (2011a, p. 101).

A leitura deste quadro mostra, nas duas primeiras colunas, variáveis que podem ser percebidas quando se observa o gráfico de uma reta no plano cartesiano. Nas duas últimas colunas, é possível constatar as mudanças correspondentes nos coeficientes da equação da reta $y = ax + b$. Por exemplo, o sentido ascendente (crescente) da reta é caracterizado por um coeficiente $a > 0$ sem a presença de sinal algum. Para o sentido descendente, o coeficiente $a < 0$ e há a presença do sinal “-”. Percebemos, neste exemplo, que para efetuar a conversão é necessário conhecer os elementos semióticos em cada sistema (gráfico e equação) e referenciar entre eles estes elementos.

Tomando por base estas ideias de Duval, na conversão entre equação e gráfico, estendemos o caso da função linear/afim para outras funções ou equações.

No esboço de curvas, o procedimento que mais se observa no Ensino Básico é o uso de uma tabela de pontos obtida por atribuição de valores na expressão matemática da curva. (SILVA, 2008). Tomemos o exemplo para representar a curva $y = 2x^2 - 4x + 6$.

Figura 3 - Procedimento ponto a ponto para o exemplo $y = 2x^2 - 4x + 6$



Fonte: Os autores.

Observa-se, no procedimento mostrado na figura 3, que cada par ordenado tem um ponto assinalado, e a curva pode ser traçada juntando estes pontos. Há muitos defeitos nesta situação: a curva passa a ser um aglomerado de alguns pontos, o aluno perde de vista a percepção global da curva. É importante lembrar que, antes mesmo de desenhar a curva no plano, já se sabe que o esboço é de uma parábola, ou seja, já se conhece a forma da curva. A conversão se dá apenas em um sentido, o sentido de um conjunto de pontos, que se imagina que seja representativo, e a curva no plano cartesiano obtida pela junção desses pontos. Não raro, no caso das parábolas, o vértice fica de fora desses pontos calculados, e algum outro ponto é forçado a se tornar o vértice. Isto pode acontecer no caso em que a ordenada do vértice não é inteira.

O sentido da conversão da forma simbólica para a gráfica tem congruência semântica apenas para cada ponto: um ponto da tabela é congruente com um ponto no gráfico, mas diversos pontos da tabela não têm congruência semântica com a curva em sua forma global gráfica: a parábola é um traçado contínuo enquanto que a tabela, por maior que seja, mostra apenas certo número de pontos. A conversão no outro sentido, da curva em sua forma gráfica para a simbólica, é altamente não congruente.

No caso da conversão entre equação e gráfico para as parábolas, há na forma algébrica três coeficientes a serem confrontados e comparados com a parábola em sua forma gráfica cartesiana. Diferentemente da maneira como Duval (2011a) tratou as retas, o caso das parábolas precisa de outra abordagem, mas que mantenha a ideia fundamental proposta por ele de interpretação global.

A equação $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, b , c constantes reais) representa um conjunto de parábolas no plano cartesiano com eixo de simetria vertical. Estudar as variações dos coeficientes a , b , c se torna impraticável tendo em vista as inúmeras possibilidades. No entanto, a parábola escrita na forma $(y - y_v) = a(x - x_v)^2$ tem o mesmo gráfico de $y = ax^2$ só que o vértice de é reposicionado em (x_v, y_v) . Este foi o caminho traçado por Moretti (2003) para manter a ideia de interpretação global de propriedades figurais no esboço das parábolas.

O quadro 3 a seguir apresenta os elementos semióticos em cada um dos sistemas gráfico cartesiano ou algébrico.

Quadro 3 - Registros destacados para a conversão de parábolas

Registros algébricos	Registros gráficos cartesianos
$y = ax^2 + bx + c$	Parábola com eixo de simetria vertical
$a > 0$	Parábola com concavidade voltada para cima
$a < 0$	Parábola com concavidade voltada para baixo
$y = ax^2$ ou $(y - 0) = a(x - 0)^2$	Parábola com vértice em $(0, 0)$
$(y - y_v) = a(x - x_v)^2$	Parábola $y = ax^2$ ou $(y - 0) = a(x - 0)^2$ repositionadas no vértice (x_v, y_v)

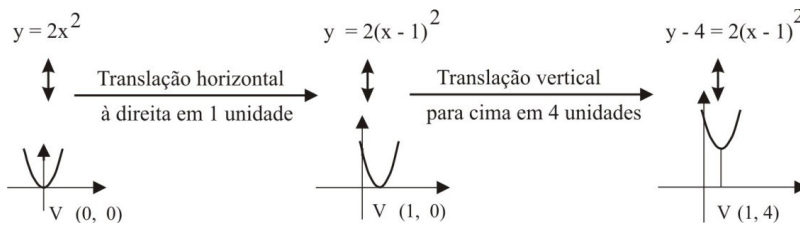
Fonte: Os autores.

Tome-se o seguinte exemplo: as curvas $y = 2x^2 - 4x + 6$ e $y = 2x^2$ possuem a mesma forma, apenas o que muda são as suas posições no plano cartesiano. Para obter o gráfico de $y = 2x^2 - 4x + 6$ basta repositionar o vértice da parábola $y = 2x^2$ em $(1, 4)$:

- translação horizontal à direita em uma unidade da curva $y = 2x^2$, o que resulta algebricamente a equação $y = 2(x - 1)^2$;
- translação para cima em 4 unidades da curva de equação $y = 2(x - 1)^2$, o que resulta finalmente $(y - 4) = 2(x - 1)^2$ ou $y = 2x^2 - 4x + 6$.

Esquemáticamente, tem-se o seguinte para o exemplo $y = 2x^2 - 4x + 6$ ou $(y - 4) = 2(x - 1)^2$:

Figura 4 - Esquema da representação gráfica de $y = 2x^2 - 4x + 6$ ou $(y - 4) = 2(x - 1)^2$



Fonte: Os autores.

No esquema da figura 4, observa-se que movimentos horizontais e verticais efetuados na curva são percebidos de forma simultânea nas representações gráfica e simbólica. Deste modo, constata-se que a conversão se dá nos dois sentidos, conforme apregoa Duval (1993, p. 51) em sua hipótese de aprendizagem.

A curva é tratada globalmente, e apenas um ponto se destaca: o vértice da parábola, ponto importante da parábola e é nele que muitos problemas buscam significados. Outros elementos constitutivos da parábola, como o foco e a reta

diretriz, podem ser agregados ao esboço da curva. Para o exemplo da parábola $(y - 4) = 2(x - 1)^2$, com os movimentos de translações, o foco $F(0, 1/8)$ de $y = 2x^2$ passa para $F'(0 + 4, 1/8 + 1) = F'(4, 9/8)$ que é o foco de $(y - 4) = 2(x - 1)^2$ e a reta diretriz $y = -1/8$ se torna $y' = -1/8 + 4 = 31/8$.

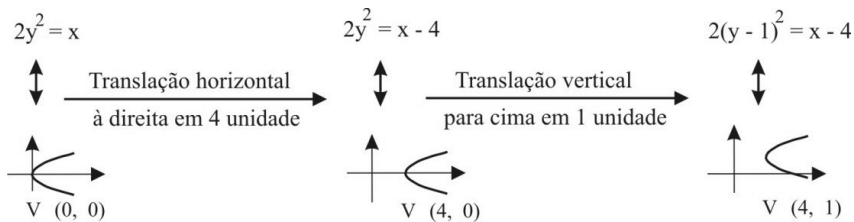
Deste estudo ressalta que a parábola na forma da $(y - y_v) = a(x - x_v)^2$ traz uma série de vantagens: além daquelas já apontadas, pode-se destacar a facilidade para o reconhecimento e cálculo das raízes. Assim, por exemplo, é fácil ver que a parábola $(y - 4) = 2(x - 1)^2$ não possui raízes reais por conta da impossibilidade, no campo dos reais, da igualdade $-4 = 2(x - 1)^2$. Além disso, as raízes podem ser calculadas a partir dessa expressão.

O ensino da parábola pode ser intensificado para o caso das parábolas do tipo $y = ax^2$, e as curvas que não estão na origem do sistema podem ser tratadas pelo reposicionamento dos vértices ou pelos movimentos de translações. A simetria é um exemplo importante: parábolas do tipo $y = ax^2$ têm como eixo de simetria a reta $xv = 0$, exatamente a reta vertical que passa pelo vértice da parábola. No Ensino Médio, a simetria pode ser explorada, por exemplo, no estudo do movimento de queda livre dos corpos.

Genericamente, qualquer curva do tipo $y = ax^2 + bx + c$ pode ser colocada na forma $(y - y_v) = a(x - x_v)^2$ sendo (x_v, y_v) o vértice, e as conversões podem ser efetuadas por reposicionamento dos vértices ou por translações.

O mesmo procedimento feito para as parábolas $y = ax^2 + bx + c$ pode ser também empregado para as parábolas do tipo $ay^2 + by + x$ que possuem eixo de simetria horizontal. A partir do simples exemplo $2y^2 - 4y + 6 = x$ ou $2(y - 1)^2 = (x - 4)$ percebe-se esta possibilidade conforme mostrado na figura 5 a seguir:

Figura 5 - Esquema da representação gráfica de $2y^2 - 4y + 6 = x$



Fonte: Os autores.

Para representar graficamente a parábola $2y^2 - 4y + 6 = x$ ou $2(y - 1)^2 = (x - 4)$ ou, têm-se os seguintes movimentos: translação horizontal de $2y^2 = x$ à direita em 4 unidades, o que resulta a parábola $2y^2 = x - 4$; em seguida, translação de $2y^2 = x - 4$ para cima em 1 unidade, o que dá a parábola $2(y - 1)^2 = (x - 4)$.

Genericamente as parábolas do tipo $ay^2 + by + c = x$ podem ser transformadas em $a(y - y_v)^2 = (x - x_v)$ sendo (x_v, y_v) o vértice. Levando-se em conta o domínio e contradomínio definidos de forma conveniente, parte das funções do tipo $y = ax^2 + bx + c$ possui inversas cujas formas são dadas por $ay^2 + by + c = x$. Por exemplo, a função $y: [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$, $y = x^2 + 1$ ou $(y - 1) = (x - 0)^2$ tem como inversa a função $g: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $g^2 + 1 = x \Leftrightarrow (g - 0)^2 = x - 1$, ou $g = \sqrt{x - 1}$. Como essas curvas são inversas uma da outra, os seus gráficos possuem simetria axial em relação à reta $y = x$.

Resumimos, no quadro 4 a seguir, os elementos que são destacados para a conversão entre parábolas.

Quadro 4 - Registros destacados para a conversão de parábolas

Registros algébricos	Registros gráficos cartesianos
$ay^2 + by + c = x$	Parábola com eixo de simetria horizontal
$a > 0$	Parábola com concavidade voltada à direita
$a < 0$	Parábola com concavidade voltada à esquerda
$ay^2 = x$ ou $a(y - 0)^2 = (x - 0)$	Parábola com vértice em $(0, 0)$
$a(y - y_v)^2 = (x - x_v)$	Parábola $ay^2 = x$ ou a $(y - 0)^2 = (x - 0)$ reposicionada no vértice (x_v, y_v)

Fonte: Os autores.

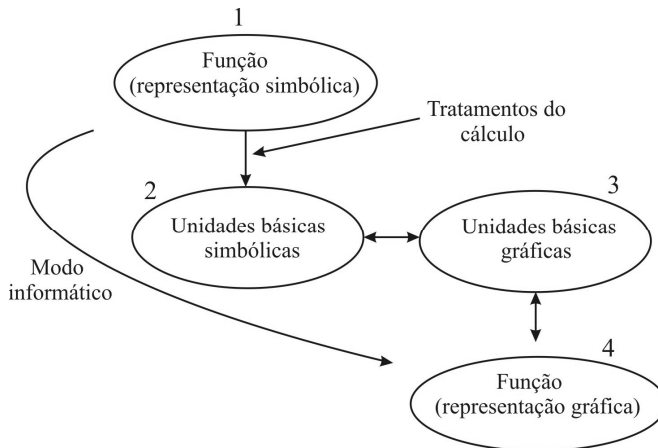
Este modo de proceder para esboçar a parábola que parte da parábola de mesma forma com vértice posicionado na origem do sistema permite que modificações possam ser percebidas nos dois sentidos da conversão e com isso contribui para a percepção de interpretação global de que fala Duval (2011a). No caso da função linear/afim $y = ax + b$, são os coeficientes a e b que fazem a relação com as retas no plano cartesiano. Para o caso das parábolas, conforme mostrado no quadro 3 e quadro 4, os elementos importantes para manter a ideia de conversão nos dois sentidos são: o sinal do coeficiente a da parábola (voltada para cima, voltada para baixo, voltada à direita, voltada à esquerda); as coordenadas dos vértices de $y = ax^2$ e $y = ax^2 + bx + c$, para os casos das parábolas com simetria vertical; as coordenadas dos vértices de $ay^2 = x$ e $ay^2 + by + c = x$ para os casos das parábolas com simetria horizontal.

O estudo aqui feito para as parábolas com simetria horizontal ou vertical pode também ser efetuado para outras funções elementares, como foi feito por Silva (2008) para o caso das funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas que têm, no Ensino Médio, uma primeira abordagem.

No ensino universitário, a possibilidade de procedimento de conversão que permite acompanhar modificações simultâneas entre os registros de

representação simbólica e gráfica é praticamente inexistente dada a variedade e complexidade das funções que são estudadas. Neste caso, Moretti e Luiz (2010) apresentam o esquema a seguir, que sintetiza o modo pensado para que a conversão entre equação e curva que mantenha a ideia preconizada por Duval (2011a) de interpretação global de propriedades figurais seja concretizada:

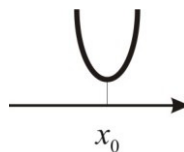
Figura 6 - Esquema do procedimento informático de interpretação global



Fonte: Moretti e Luiz (2010, p. 531).

Esse esquema mostra que a conversão direta no sentido da representação gráfica para a representação simbólica não é possível para uma grande variedade de equações que são estudadas no Ensino Superior. O caminho encontrado por Moretti e Luiz (2010) é o da utilização de unidades básicas gráficas que se relacionam com unidades básicas simbólicas (limite, derivada, assíntotas, etc.) sem chegar, de fato, à representação simbólica. A função em sua forma gráfica permite visualizar as unidades básicas gráficas que podem ser relacionadas às unidades básicas simbólicas. Assim, para o exemplo a seguir, a unidade básica gráfica destacada na figura 7, de alguma função em sua forma gráfica, permite que se suspeite que tal função y possua um mínimo na vizinhança de x_0 ; na figura 6 é o caminho $4 \rightarrow 3$.

Figura 7 - Unidade básica gráfica de um mínimo



Fonte: Moretti e Luiz (2010, p. 533).

Tal suspeita deve ser confirmada pelos tratamentos do cálculo na função em sua forma simbólica, ou seja, verificar, por exemplo, que $y'x_0 = 0$ e $y''x_0 > 0$. Deste modo, as conversões nos sentidos **1→4** e **4→1** propostas por Duval (2011a) se realizam, respectivamente, nas formas seguintes: **1→4** e **4→3↔2←1**.

Conclusões

A aprendizagem matemática exige a operação de conversão e o reconhecimento simultâneo dos elementos comuns nos sistemas semióticos considerados. A operação de tratamento é, portanto, exigida em cada um desses sistemas. No caso da função linear/afim, $y = ax + b$, são os coeficientes a e b que fazem a relação com as várias posições das retas no plano cartesiano. Para o caso das parábolas, os elementos importantes para manter a ideia de conversão nos dois sentidos são: o sinal do coeficiente “ a ”, que indica se a parábola está voltada para cima, para baixo, à direita ou à esquerda; e as coordenadas do vértice. O estudo da conversão entre gráfico e equação pode ser completado com registros da Célula 11 (registros discursivos e plurifuncionais) na forma de problemas e questionamentos que podem explorar deduções possíveis, relações e significados quanto à forma da curva, simetrias, etc. Não basta utilizar sistemas diferentes, como o exemplo da parábola na figura 3, sem que haja a coordenação dos elementos semióticos em cada um dos sistemas mobilizados.

O ensino que se baseia em apenas uma das células, ou que, mesmo que use registros de mais de uma célula, mas que não o faz com coordenação, é o que se pode chamar de ensino hermético: devota-se um tempo enorme ao ensino das operações básicas (registros da Célula 21) e, no entanto, o significado delas é praticamente deixado de lado. Para tratar do significado das operações seria necessário incluir, de forma coordenada, principalmente os registros da Célula 11. O ensino hermético também pode ser denominado mais especificamente de algoritmizado quando permanece em registros semióticos monofuncionais da Célula 22 ou, mais geralmente, da Célula 21. O ensino compartimentalizado é aquele em que subsistemas de uma mesma célula não são coordenados entre si e menos ainda com registros de outras células. Sem esta coordenação, o ensino se torna hermético: este fechamento sobre si mesmo pode persistir mesmo em um ensino que utiliza diferentes registros de representação. A razão disso se deve ao fato de que não é simplesmente o uso de diferentes registros a condição necessária para a compreensão matemática, mas a coordenação entre eles. (DUVAL, 1993, p. 371-375).

Referências

- BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: USP, Edgard Blücher, 1974.
- BRANDT, C. F. **Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração**. 2005. 241 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.
- DUVAL, R. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Annales de didactique et de sciences cognitives, 1993. v. 5.
- _____. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Berne: Peter Lang, 1995.
- _____. **Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 16, n. 3, p. 349-382, 1996.
- _____. **L'analyse cognitive du fonctionnement de la pensée et de l'activité mathématique**. Cours sur les apprentissages intellectuels. PUC/SP, 1999.
- _____. **Los problemas fundamentales en el aprendizaje matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo**. Tradução de Myrian V. Restrepo. Cali: Universidade del Valle: 2004.
- _____. **Gráficos e equações: a articulação de dois registros**. Tradução de Mércles T. Moretti. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011a. DOI: 10.5007/1981-1322.2011v6n2p96
- _____. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: MACHADO, S. D. de A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. 8. ed. Campinas, SP: Papirus, 2011b. p. 11-33.
- _____. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. Organização de Tânia M. M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011c.
- _____. **Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência**. Tradução de Mércles T. Moretti. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012a. DOI: 10.5007/1981-1322.2012v7n1p97
- _____. **Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência**. Tradução de Mércles T. Moretti. **REVEMAT**, Florianópolis v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012b. DOI: 10.5007/1981-1322.2012v7n1p118
- FREGE, G. **Écrits logiques et philosophiques**. Tradução de Claude Imbert. Paris: Seuil, 1971.
- GRANGER, G. G. **Langages et épistémologie**. Paris: Éditions Klincksieck, 1979.
- MORETTI, M. T. **A translação como recurso no esboço de curvas através da interpretação global de propriedades figurais**. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003. p. 149-160.

MORETTI, M. T.; LUIZ, L. S. O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas no ensino universitário. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 3, p. 529-547, 2010.

MORETTI, M. T.; FERRAZ, A. G.; FERREIRA, G. G. Estudo da conversão entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. **Quadrante**, Lisboa, v. 17, n. 2, p. 97-122, 2008.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. Tradução de J. T. Coelho Netto. São Paulo: Perspectiva, 2000.

SAUSSURE, F. de. **Curso de linguística geral**. Tradução de A. Chelini, J. P. Paes, I. Blikstein. São Paulo: Cultrix, 2008.

SILVA, M. O. **Esboço de curvas**: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica. 2008. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

Recebido em 23/03/2012

Aceito em 27/09/2012