

**Optimización de funciones con derivadas en aula invertida: estudio a través de múltiples estrategias didácticas**

**Optimization of functions with derivatives in an inverted classroom: study through multiple teaching strategies**

**Otimização de funções com derivadas em uma sala de aula invertida: estudo através de múltiplas estratégias de ensino**

Carlos Fernando López Rengifo\*

 <https://orcid.org/0000-0003-4129-3009>

Edison Chanca Perez\*\*

 <https://orcid.org/0000-0002-1545-9063>

Edwin Roger Esteban Rivera \*\*\*

 <https://orcid.org/0000-0003-4669-1268>

**Resumen:** Debido al alto porcentaje de estudiantes de ingeniería que desaprovechan en matemáticas, sobre todo en los primeros semestres de formación profesional, se experimentó un conjunto de estrategias didácticas para la optimización de funciones con derivadas en aula invertida, se ensayó trabajos en equipo, trabajos individuales, trabajos con solo videos y trabajos con videos, separatas y presentaciones. A través del diseño cuasi experimental con grupo control y experimental, se estableció la efectividad del aula invertida en los aprendizajes de estudiantes universitarios y que no existen diferencias significativas en los promedios de la prueba de salida al trabajarse con diversas estrategias didácticas.

**Palabras clave:** Clase invertida. Optimización de funciones. Enseñanza de las matemáticas.

---

\* Doctor en Ciencias de la Educación. Docente de la Universidad Nacional del Centro del Perú. Presidente del comité de acreditación de la carrera de Ciencias Matemáticas e Informática y de Gestión Curricular de Ciencias Matemáticas. E-mail: <cflopez@uncp.edu.pe>.

\*\* Maestro en Educación. Mención Educación Matemática. Miembro del comité de acreditación de la carrera de Ciencias Matemáticas e Informática - Universidad Nacional del Centro del Perú. E-mail: <echancap@uncp.edu.pe>.

\*\*\* Doctor en Ciencias de la Educación. Docente de la Universidad Nacional Hermilio Valdizán. Director de la Unidad de Investigación - Facultad Ciencias de la Educación. E-mail: <resteban@unheval.edu.pe>.

**Abstract:** Due to the high percentage of engineering students who fail in mathematics, especially in the first semesters of professional training, a set of didactic strategies for the optimization of functions with derivatives in an inverted classroom was experimented; team work, individual work, work only with videos and work with videos, handouts and presentations were tested. Through the quasi-experimental design with control and experimental groups, it was established the effectiveness of the inverted classroom in the learning of university students and that there are no significant differences in the averages of the exit test when working with different didactic strategies.

**Keywords:** Inverted classroom. Function optimization. Mathematics teaching.

**Resumo:** Devido à alta porcentagem de estudantes de Engenharia que falham em matemática, especialmente nos primeiros semestres de treinamento profissional, foi experimentado um conjunto de estratégias didáticas para a otimização de funções com derivados em uma sala de aula invertida; trabalho em equipe, trabalho individual, trabalho somente com vídeos e trabalho com vídeos, apostilas e apresentações foram testados. Através do projeto quase-experimental com grupos de controle e experimentais, foi estabelecida a eficácia da sala de aula invertida no aprendizado dos estudantes universitários e que não há diferenças significativas nas médias do teste de saída quando se trabalha com diferentes estratégias didáticas.

**Palavras-chave:** Sala de aula invertida. Otimização de funções. Ensino de matemática.

## Introducción

En general, los estudiantes de las carreras profesionales de ingeniería tienen dificultades en la resolución de problemas sobre la optimización de funciones, utilizando derivadas. Las aplicaciones de las derivadas son algoritmos útiles en el desarrollo de los problemas sobre optimización de funciones. Sobre dichos tópicos, análisis matemático y cálculo diferencial, existe mucha bibliografía y también existen en el internet muchos videos tutoriales sobre la temática; sin embargo, son vigentes las dificultades que tienen los estudiantes para internalizar los procedimientos de resolución de problemas, tal como lo señala Sahin et al. (2015), a pesar de que son temas bastante conocidos por los estudiantes, se observa con bastante frecuencia una falta de preparación, por lo que se hace necesario que los docentes, dada la magnitud del problema, ensayen diversas estrategias que viabilicen el aprendizaje de optimización de funciones.

Debido a la inmovilización social decretada en el Perú y el mundo como una forma de evitar el contagio del Covid-19, las clases universitarias migraron obligatoriamente de lo presencial a lo virtual. Docentes y estudiantes tuvieron que familiarizarse rápidamente con los entornos digitales, tanto para acceder a información y recursos educativos como para producirlos y subirlos a las plataformas virtuales.

En estas condiciones, la optimización de funciones con derivadas se constituyó en todo un reto en las universidades. Generalmente las clases estaban centradas en videoconferencias, las mismas que se grababan y quedaba a disposición de los estudiantes, quienes por ausencia o por la necesidad de volver a vivenciar la clase recurrían a las grabaciones, acomodándose al ritmo de aprendizaje de cada uno de ellos.

La atípica situación generada por el COVID-19 puso de manifiesto las brechas digitales. No todos los estudiantes contaban con adecuado acceso a internet, tampoco con equipos acorde a las exigencias actuales. Los docentes recurrieron a múltiples estrategias, entre ellas a la propuesta de Jonathan Bergman y Aarom Sams. En efecto, el año 2007 ambos profesores de química del Instituto Woodland Park de Colorado, empezaron a grabar videos de presentaciones en PowerPoint con el fin de no perjudicar a sus estudiantes ausentes. Las lecciones se difundieron por internet, sus estudiantes e incluso quienes no eran, hicieron uso de este material. Debido a la aceptación del material, los dos profesores comenzaron a compartir sus experiencias a otros

profesores, quienes comenzaron a utilizar videos online y videos podcasts para enseñar a los estudiantes fuera del aula de clase (RUT, 2017). Las experiencias y sus resultados de Bergmann y Sams fueron publicados el año 2012, en el libro *Flip your classroom*, cuya difusión generó la organización Red de aprendizaje invertido o Flipped Learning Network (López, 2019).

Luego de la publicación del libro y de su difusión bastante extendida, se aplicó esta estrategia en el proceso enseñanza y aprendizaje en diversos países, tanto en el nivel secundario y terciario de los sistemas educativos, lográndose: a) mejora del nivel del pensamiento crítico (CHUKUSOL; PIRIYAUSURAWONG, 2022); b) mejora de los aprendizajes asociada a niveles de confianza, motivación y compromiso; c) mejora del nivel de satisfacción, que fue buena en la mayoría de estudiantes (AWIDI; PAYNTER, 2019); d) el establecimiento de una relación inversa entre resultados con la edad y la independencia de resultados con respecto al género y; e) un espacio de reflexión, sobre los factores de usabilidad e impacto que no se asocian al deseo de seguir aprendiendo con la estrategia (MOHAMED; LAMIA, 2018).

En otras investigaciones, la clase invertida se aplicó con estrategias complementarias: aprendizaje en la nube y juegos de mesa (CHUKUSOL; PIRIYAUSURAWONG, 2022); aula invertida con gamificación que generó una revisión atenta de los temas de los videos y el desarrollo de los cuestionarios sobre los mismos, transformándose dicho entusiasmo en la mejora de los resultados en dos de las tres pruebas mensuales. Los estudiantes del grupo experimental obtuvieron mejores calificativos que los del grupo control, así como la satisfacción de haber competido, percepción manifestada en las entrevistas a los estudiantes (ZAINUDDIN, 2018).

Además de las bondades mencionadas, la revisión sistemática realizada por Akçayir y Akçayir (2018) indica que la clase invertida mejora el aprendizaje de los estudiantes, mejora la retención de la información, mejora el pensamiento crítico, el manejo de las TIC y las capacidades creativas y de resolución de problemas en el plano cognitivo, mientras que en lo valorativo-actitudinal mejora la autonomía, la participación, la motivación, el compromiso, la satisfacción con las estrategias de enseñanza y la colaboración, entre otros.

Pero no todos se sienten satisfechos con la aplicación de la estrategia en sus clases, algunos estudiantes manifiestan que no les agrada ver las clases grabadas con anticipación (LOMBARDINIA et al., 2018; AWIDI; PAYNTER, 2019), se sienten disconformes con las limitaciones para aprender solos, sin el apoyo y pautas del docente (MOHAMED; LAMIA, 2018); el incremento de la carga académica por el horario adicional a las horas de clase establecidas es causa de la insatisfacción de los estudiantes. No todos cumplen con la revisión previa, sea por falta de tiempo o relajo; con relación a las conclusiones que señalan que se mejoraron procesos de cognición y de actitudes, se alzan comentarios de que los efectos del aula invertida no dura mucho. Entre los factores externos que limitan los logros de aprendizaje figuran: la carencia de una óptima conectividad a internet en estudiantes y docentes, la falta de preparación de los docentes para elaborar videos de calidad, el desconocimiento del docente de qué tanto aprendieron del tema sus estudiantes (MOHAMED; LAMIA, 2018; AWIDI; PAYNTER, 2019).

La coyuntura de pandemia que fue el contexto en el que se realizó la investigación, hizo que los estudiantes aceptaran como normal la realización de las actividades previas a las clases. En la Universidad Tecnológica del Perú las actividades de la estrategia clase invertida se desarrolló con estudiantes de ingeniería de la Universidad Tecnológica del Perú: Ingeniería electrónica, mecánica e industrial, del II semestre, en las que el aprendizaje de la optimización de funciones con derivadas, se dimensionó en tres capacidades: a) manejo de algoritmos; b) manejo de estrategias de resolución de problemas y; c) comunicación argumentada de los procedimientos.

La clase invertida es un modelo pedagógico en el que la organización de las actividades de enseñanza y aprendizaje se invierten, se reorganizan, dándose en primer lugar el aprendizaje individual, fuera del aula y luego la enseñanza de situaciones de mayor complejidad como la resolución de problemas o la profundización del objeto de enseñanza, es decir, aprovechar el tiempo en clase “para tareas de aprendizaje en grupo más activas que las que se llevan a cabo en un entorno tradicional” (AWIDI; PAYNTER, 2019, p. 269)

El presente artículo da cuenta de la experiencia que tuvo como objetivo experimentar un conjunto de estrategias didácticas para la optimización de funciones con derivadas en aula invertida, se ensayó trabajos en equipo, trabajos individuales, trabajos con solo videos y trabajos con videos, separatas y presentaciones.

## Marco teórico

### Clase invertida

#### *Concepción de aula invertida*

Tomamos inicialmente, lo que manifiestan los que formalizaron la estrategia de la Clase invertida: “Es un enfoque pedagógico en el que la instrucción directa se mueve desde el espacio de aprendizaje colectivo hacia el espacio de aprendizaje individual, y el espacio resultante se transforma en un ambiente de aprendizaje dinámico e interactivo” (BERGMANN; SAMS, 2014; como se citó en LÓPEZ, 2019, p. 261).

Los desarrolladores teóricos, en base al análisis de las experiencias, precisan algunos atributos del modelo, como:

- a) Es un modelo colaborativo, que favorece el aprendizaje y; asigna responsabilidad al equipo y sus miembros para la tarea de aprender (ANGELINI; GARCÍA, 2015; como se citó en DURÁN et al., 2018).
- b) Se invierte la secuencia de las actividades (AKÇAYIR; AKÇAYIR, 2018; LOMBARDINIA et al., 2018; CHUKUSOL; PIRIYAUSURAWONG, 2022); se usan otros escenarios de aprendizaje (MOHAMED; LAMIA, 2018); se adicionan roles a los participantes y; se utilizan herramientas virtuales con las que están familiarizadas los estudiantes (MOHAMED; LAMIA, 2018; LÓPEZ, 2019).

El aula invertida promueve en los estudiantes la revisión de información sobre determinados temas, en un material previamente diseñado o seleccionado por el docente. La revisión debe realizarse antes de la fecha programada para el desarrollo de la clase, de tal manera que en las clases se profundice sobre el tema, se absuelven dudas y se desarrollan las aplicaciones que permiten consolidar los aprendizajes. La estrategia tiene como eje la autonomía y responsabilidad de los estudiantes (BAEPLER et al., como se citó em ZAINUDDIN, 2018), cuya intensidad va mediada por los docentes, esperando efectos naturales como una mejor y mayor interacción con los estudiantes; material a disposición de los estudiantes alineado a lo que desarrolla en clase; socialización y consolidación de los conocimientos a partir de lo revisado por los estudiantes (MOHAMED; LAMIA, 2018).

### ***Responsabilidades y características de la clase programada***

La delegación de responsabilidades tiene sustento de la psicología cognitiva Piaget (como se citó en GUTIÉRREZ, 2012) y Ausubel (como se citó en RODRÍGUEZ, 2011). Consiste en entregar al estudiante la tarea de informarse sobre un tema antes de que éste se desarrolle en clase, de manera que en ésta se aclaren dudas, se discutan posturas, se profundice el tema, se ejemplifique con aplicaciones prácticas (MEDINA, 2016). De esta manera, el desarrollo de competencias, como propósitos de la formación profesional, no solo se logra con las clases magistrales, propias de la práctica tradicional y aún vigente en las aulas universitarias. Es necesario delegar a los estudiantes la responsabilidad de construir sus conocimientos.

### ***Características de la estrategia y clase***

Concordando con Villalba et al. (2018), estas son:

- El aula deja de ser el único escenario de aprendizaje. Los entornos de aprendizaje son flexibles, se estructuran de acuerdo a la disponibilidad.
- El cambio a la centralidad del aprendizaje, se refiere al cambio al enfoque centrado en el estudiante.
- Cambios en la forma de planificar las clases y la preparación de material: qué contenido y material para lo asincrónico y, qué para lo que se va a trabajar con todos los estudiantes, de manera sincrónica.

Con el material de estudio seleccionado por el docente, para que sea analizado y aprendido por los estudiantes antes de las clases fuera de la Institución Educativa, se espera sesiones de aprendizaje activas, con los estudiantes de protagonistas. En las clases invertida se combina dos tipos de trabajo: el individual y el de la clase (en equipo). El individual lo realiza el estudiante en sus momentos disponibles, en los lugares que convenga; mientras el trabajo en equipo es el que se realiza con sus pares en la clase, en el horario correspondiente, de acuerdo al programa curricular (BANOY, 2020).

### ***Ventajas de la aplicación del método de la clase invertida***

Las experiencias con clase invertida han permitido a Manson et al. (como se citó en CORTÉS; RIVEROS, 2019) identificar las siguientes ventajas:

- El estudiante se convierte en el protagonista de su aprendizaje, por lo que se espera un mayor interés y motivación, a la par que mejora de su sentido de responsabilidad, crítica y madurez.
- Los estudiantes llegan a clase con conocimientos previos focalizados en el tema a tratar, por ende, existe una mejor disposición a participar, para socializar y consensuar conceptos y procedimientos.
- Existe una mejor comunicación entre profesor y estudiante, ya que disponen de mayor tiempo para la interacción entre ellos.

- Más oportunidades para la realimentación (*feedback*). Se absuelven dudas, consolidando el aprendizaje, utilizando otras formas de enseñanza diferentes a la presentada en el material inicial.

### ***Reto y condición básica***

Por lo expuesto anteriormente se requiere motivar a los estudiantes para obtener de ellos un mayor compromiso y responsabilidad, ya que ellos son los protagonistas de sus aprendizajes, por lo que deben comprometerse a estudiar y aprender los contenidos antes de las clases. A ello se debe agregar que tanto los estudiantes como los docentes, deben contar con los recursos, servicios y tecnología necesaria para seguir las fases de la estrategia, sin inconvenientes.

## **Aprendizaje de optimización de funciones con derivadas**

### ***Optimización de funciones***

Todas las personas tenemos un pensamiento optimizador debido a que siempre estamos buscando mejorar objetos, artefactos, procesos, haciendo uso de la inteligencia y la intuición (MALASPINA, 2011). Ese tipo de pensamiento es el que motiva el desarrollo de la técnica, tecnología y ciencia.

La optimización enfocada desde el punto de vista específicamente matemático tiene al menos dos direcciones bien definidas: a) optimización desde la programación lineal, iniciada por Leonid Kantorovich en 1939 y desarrollada por Dantzig (método simplex en 1947), John von Neumann (teoría de la dualidad en 1947) y Narendra Karmarkar (método del punto interior en 1984); b) optimización de funciones usando derivadas, las que hacen referencia a los procedimientos de optimización que tienen como objetivo fundamental obtener un valor máximo o un valor mínimo de alguna variable.

### ***Dimensiones del aprendizaje de optimización de funciones***

El aprendizaje de optimización de funciones se estructura en tres dimensiones: la primera es el manejo del algoritmo, que consiste en aplicar el protocolo de uso de las derivadas para calcular los mínimos y máximos de la función; la segunda dimensión es la resolución de problemas, consiste en la comprensión del problema, el planteo de las ecuaciones y la ejecución de los procedimientos para encontrar la solución y; la tercera es la comunicación argumentada del procedimiento utilizado en la resolución del problema o situación.

Actualmente se tiene referencia de trabajos de investigación y experiencias narradas por muchos docentes, sobre el aprendizaje de los procedimientos propios de la optimización de funciones con la aplicación de derivadas, sin embargo, debido al alto grado de dificultad, es elevado el porcentaje de desaprobados en las pruebas sobre este tema y en general en las asignaturas de cálculo diferencial, sobre todo en las carreras profesionales de ingeniería.

#### a) Algoritmo de optimización de funciones

La optimización de las funciones es el procedimiento por el cual se encuentran los mínimos

y máximos de funciones que, de acuerdo al contexto en el que se defina la situación matemática, se opta por determinadas decisiones.

Para encontrar las funciones de la primera y segunda derivada se necesita identificar el caso de derivada y realizar procedimientos algebraicos y evaluar las funciones para determinados valores. Este procedimiento si bien es rutinario, la complejidad de la expresión que se debe optimizar es la que implica el nivel de dificultad para seguir el algoritmo.

#### b) Resolución de problemas

La resolución de problemas, en abstracto, es el proceso que sigue un resolutor que partiendo de la identificación y comprensión del problema, lo aborda utilizando sus herramientas cognitivas y reflexionando sobre los posibles caminos que tiene su solución. En general los problemas son considerados como tales cuando no tienen solución simple o algorítmica.

Al constituirse la resolución de problemas en el eje de la actividad matemática, además de ser uno de los objetivos del área de matemática, es de suma importancia que los estudiantes desarrollen capacidades de diseños y aplicación de estrategias de resolución.

#### c) Explicación argumentada

La rutina y la ejercitación de los algoritmos no son suficientes para una comprensión del objeto matemático o situación en el que se aborda un problema. Es la explicación argumentada, razonada con criterios y/o fundamentos matemáticos, la que evidencia el haber comprendido la situación y la que configura desempeños fundamentados. Con respecto a la predominancia de los recursos argumentativos Jiménez y Pineda (2013) refieren que existe una gran variedad de estilos de argumentar un procedimiento, destacando la escrita: “parece que la exigencia de la escritura permite desarrollar mayores niveles de elaboración matemática. Con respecto a los recursos discursivos se identificaron, de manera predominante, los de tipo descriptivo y explicativo” (pp. 105-106). Los estudiantes dan testimonios de que aprendieron comprensivamente.

### ***Trabajo individual y en equipo para aprender***

Las dos formas de trabajo, el individual y en equipo tienen particularidades que favorecen la consolidación del aprendizaje. El trabajo individual de los estudiantes es una forma que viabiliza sin dificultades, el uso de estrategias y estilos de aprendizaje propios de la persona; facilita la identificación de las dificultades que tiene frente a determinados temas; facilita la identificación de los temas o tareas que aprende con facilidad e; indica los tiempos que tiene que dedicarle a cada temática por su nivel de complejidad. En general, tiene un afán competitivo, sea para conocer lo que no se conocía o para competir con los otros compañeros (ROSELLI, 2008).

El equipo “es un grupo de individuos que trabajan juntos para mejorar un proceso. Gracias al conocimiento y la experiencia que posee cada miembro del equipo, se pueden lograr verdaderas mejoras trabajando en colaboración, más que individualmente” (WINTER, 2000, p. 8). El trabajo en equipo permite aprender de los que saben más; contrastar las ideas de los miembros del equipo; distribuir responsabilidades; asumir compromisos frente a los demás y; trabajar en pos de lograr objetivos comunes. Esta forma de trabajo es privilegiada por el socioconstructivismo, considera que el docente y los estudiantes con más saberes se convierten en mediadores (ROSELLI, 2008).

En los trabajos de equipo en forma presencial, el afecto y las relaciones personales se

constituyen en elementos principales, por lo general los equipos se forman bajo el criterio de afinidad, dejando a veces el criterio, válido también, de formar equipo con los que más saben (ROSELLI, 2008).

### **Material digital y material audiovisual en el aprendizaje**

Durante el periodo de confinamiento social por COVID-19 los estudiantes universitarios disminuyeron la lectura de bibliografía impresa para la realización de los trabajos académicos. El año 2020 y 2021 se masificó la lectura de documentos digitales y la visualización de tutoriales o videos, entre estos los de YouTube, que se han transformado de material de recreación en material académico bastante usado.

Dale (como se citó en LAVADO, 2020) considera que el uso de material audiovisual en el aprendizaje es más efectivo que el estudio con material digital, mientras que el aprendizaje de lo que se lee es solo el 10%, el aprendizaje de lo que se ve y escucha es el 50%.

Se utilizan los recursos didácticos para favorecer el aprendizaje, hacerlo viable u optimizarlo. Entre otros, los recursos pueden ser: audiovisuales, documentos académicos impresos o digitales. Estos son utilizados de acuerdo a determinados propósitos como de información, motivación, de ejecución (GUZMÁN et al., 2020).

## **Metodología**

### **Método y diseño de investigación**

La investigación corresponde a la perspectiva metodológica cuantitativa (PIÑERO et al., 2022) tipo aplicada y se realizó siguiendo los procedimientos del método experimental. La contrastación de hipótesis se hizo mediante el diseño cuasiexperimental, específicamente el diseño de dos grupos no equivalentes con pre y posprueba.

El grupo experimental se dividió en cuatro subgrupos, en función a la estrategia didáctica con el que se trabajó, la misma que se especifica en la Tabla 1.

**Tabla 1** - Distribución del grupo control y experimental – 2021

<b>Grupo</b>	<b>Revisión del material</b>	<b>Nº de Subgrupo</b>	<b>Característica del subgrupo</b>	<b>Nº de estudiantes</b>	<b>Total estudiantes</b>
Experimental	Revisaron el material en equipo	1	Recibieron videos, separatas y diapositivas.	8	31
		2	Recibieron solo videos	8	
	Revisaron el material individualmente	3	Recibieron videos, separatas y diapositivas.	7	
		4	Recibieron solo videos.	8	
Control	Grupo único				42

**Nota.** Elaboración propia

### **Población y muestra**

La población la constituyeron los 120 estudiantes de ingeniería del II semestre de la Universidad Tecnológica del Perú – Huancayo. La técnica de muestreo que se empleó fue la de

grupos intactos, dado que los estudiantes fueron ubicados en secciones desde que se matricularon (Hernández et al., 2014), un semestre antes de iniciar la investigación.

La muestra estuvo constituida por 73 estudiantes: 42 en el grupo control y 31 en el grupo experimental, todos ellos del segundo semestre de las facultades de ingeniería, de la Universidad Tecnológica del Perú, campus Huancayo.

### **Instrumento de recolección de datos**

Para recoger información de ingreso y salida se emplearon pruebas de desarrollo, con doce reactivos cada una de ellas. La variable aprendizaje de optimización de funciones con derivadas fue operacionalizada en tres dimensiones: Manejo de algoritmos, resolución de problemas y comunicación argumentada. Cada dimensión fue medida con cuatro reactivos. Los reactivos tuvieron una valoración de 0 a 5, según los siguientes criterios: Ausencia de desarrollo = 0; Desarrollo deficiente = 1; Desarrollo de aproximación a la respuesta correcta = 3; Desarrollo esperado = 5.

El instrumento fue validado por cinco expertos que cumplieron los requisitos: a) Ser docente universitario en el área de Matemática; b) Contar con cinco o más años de experiencia en la docencia de matemática superior. La prueba piloto se realizó con diez estudiantes, cuyos resultados dieron un Alfa de Cronbach = 0.86, que según Hernández-Sampieri y Mendoza (2018, pp. 324-325), basándose en Nunnally (1987), indican que el instrumento es confiable por encima de 0,80.

### **Procedimiento**

La investigación se desarrolló mediante la siguiente secuencia:

- a) Evaluación de entrada, tanto al grupo de control como al experimental.
- b) Desarrollo de las clases habituales en el grupo de control. Esta actividad tuvo una duración de tres semanas.
- c) El desarrollo de las clases en el grupo experimental tuvo ciertas diferencias, según subgrupo, pero de manera general se realizaron:
  - Preparación del material: 3 videos, 3 separatas y 3 presentaciones en PowerPoint, que se pueden visualizar activando el siguiente link <https://bit.ly/3OLdnCd> Cada video tienen una duración de 20 min aproximadamente, las separatas y presentaciones en PowerPoint fueron diseñadas por los profesores de matemática de la universidad.
  - Sensibilización a los estudiantes del grupo experimental para que voluntariamente participen de la investigación, con responsabilidad, cumpliendo con utilizar solamente el material elaborado para la investigación y trabajen individualmente o en equipo, según corresponda.
  - Distribución de los estudiantes del grupo experimental en sub grupos. Inicialmente fueron 36 estudiantes, 5 se retiraron a media experimentación, por lo que quedaron

31.

- Distribución del material de estudio de acuerdo al sub grupo, una semana antes de la clase.
  - Se activó un foro específico para la investigación en la plataforma Canva, para el intercambio de ideas y para que los estudiantes tengan un espacio de consulta al profesor de la asignatura. El foro fue visitado en muy pocas ocasiones por los estudiantes.
  - Desarrollo de tres semanas de clases, programadas según sílabo.
- d) Evaluación de salida al grupo experimental y de control.

## Resultados y discusión

### Prueba de entrada de los grupos control y experimental

En la Tabla 2 se muestra los resultados de la prueba de entrada, por dimensiones y en general. Cada una de las dimensiones se calificó de 0 a 15 puntos, lo que implica que el puntaje total de la prueba es de 0 a 45 puntos.

**Tabla 2** - Prueba de entrada – Grupos control y experimental – 2021

Nº	Estadísticos descriptivos	GRUPO CONTROL				GRUPO EXPERIMENTAL			
		D1	D2	D3	PE	D1	D2	D3	PE
1	Media	5,83	5,74	6,83	18,40	4,52	5,48	5,45	15,45
2	Mediana	5,00	6,00	7,50	18,00	4,00	6,00	5,00	14,00
3	Moda	5,00	4,00	8,00	18,00	0,00	6,00	1,00	7,00
4	Desviación estándar	2,92	2,65	3,33	7,79	3,41	3,31	4,04	9,56
5	Asimetría	0,77	0,28	-0,04	0,23	0,53	0,24	0,68	0,22
6	Curtosis	0,29	-0,30	-0,43	-0,21	-0,35	-0,21	-0,33	-1,09

**Nota.** Elaboración Propia con resultados de la prueba de entrada – 2021. D1: Manejo algoritmos; D2: Resolución de problemas; D3: Comunicación argumentada; PE: Puntaje total en la prueba de entrada

Los resultados que se muestran en la Tabla 2 indican un bajo rendimiento en los grupos control y experimental, en optimización de funciones con derivadas. Ello se observa en las medias aritméticas de 18,40 y 15,45 de 45 posibles. Lo mismo se evidencia con los puntajes bajos en cada una de las dimensiones. Así mismo, se visualiza que el control está ligeramente mejor que el grupo experimental.

Al comparar los valores de las desviaciones estándar, es favorable para el grupo control, ya que el valor obtenido del grupo experimental indica mayor dispersión de valores, alrededor de la media aritmética. Los sesgos de la asimetría y curtosis indican valores cercanos a los parámetros de una curva normal.

## Prueba de salida de los grupos control y experimental

En la Tabla 3 se muestra los resultados de la prueba de salida, por dimensiones y en general. La puntuación y la cantidad de preguntas es la misma que en la prueba de entrada.

**Tabla 3** - Prueba de salida – Grupos control y experimental – 2021

Nº	Estadísticos descriptivos	GRUPO CONTROL				GRUPO EXPERIMENTAL			
		D1	D2	D3	PS	D1	D2	D3	PS
1	Media	8,93	10,10	11,83	30,86	10,84	12,97	13,58	37,39
2	Mediana	8,00	10,00	12,00	30,00	10,00	12,00	14,00	36,00
3	Moda	8,00	10,00	10,00	30,00	8,00	12,00	14,00	36,00
4	Desviación estándar	2,91	2,64	2,61	6,28	3,58	2,46	3,58	8,14
5	Asimetría	0,36	0,03	0,21	0,65	0,32	0,04	-0,43	0,12
6	Curtosis	-0,21	0,70	-0,28	0,20	-0,55	0,07	0,42	0,22

**Nota.** Elaboración Propia con resultados de la prueba de salida – 2021. D1: Manejo algoritmos; D2: Resolución de problemas; D3: Comunicación argumentada; PS: Puntaje total en la prueba de salida

Los resultados que se muestran en la Tabla 3 indican una mejora en el rendimiento de ambos grupos, en el aprendizaje de optimización de funciones con derivadas. Al comparar los estadísticos descriptivos de tendencia central se observa que el grupo experimental tuvo un mejor rendimiento. La desviación estándar también mejoró, y es el grupo control el que tiene una menor dispersión de datos, con respecto a la media aritmética.

## Prueba de normalidad

Se realizó la prueba de normalidad a los resultados de la prueba de salida, de los grupos control y experimental, para tomar decisiones sobre los estadísticos que se utilizarán para realizar las pruebas de hipótesis.

Los p-valor de los grupos control y experimental, obtenidos con el estadístico Shapiro-Wilk, fueron mayores a 0,05 (0,136 y 0,615; respectivamente), por lo que se tomó la decisión de utilizar el estadístico paramétrico t de Student.

## Prueba de la hipótesis general

En la Tabla 4 se muestran los resultados procesados con el estadístico t de Student, de la prueba de salida aplicada a los grupos control y experimental.

**Tabla 4** - Prueba de hipótesis del grupo control y experimental en el aprendizaje de optimización de funciones con derivadas – 2021

Variable	t	Gl	Sig. (bilateral)
Prueba de salida grupo control: aprendizaje de optimización de funciones con derivadas	-3,869	71	0,000
Prueba de salida grupo experimental: aprendizaje de optimización de funciones con derivadas			

**Nota.** Elaboración Propia con resultados de la prueba de salida – 2021.

La Tabla 4 muestra un p-valor menor a 0,05 por lo que se rechazó la hipótesis nula y se aceptó la hipótesis alternativa que señala que la aplicación de la clase invertida mejora el aprendizaje de optimización de funciones, utilizando derivadas.

### Prueba de la hipótesis para cada dimensión

En la Tablas 5 se muestran los resultados procesados con el estadístico t de Student, de la prueba de salida aplicada a los grupos control y experimental, por cada dimensión.

**Tabla 5** - Prueba de hipótesis del grupo control y experimental en las dimensiones de la variable – 2021

Dimensiones	t	Gl	Sig. (unilateral)
Prueba de salida en manejo de algoritmos: Grupo control - Grupo experimental	-2,514	71	0,007
Prueba de salida en resolución de problemas Grupo control - Grupo experimental	-4,732	71	0,000
Prueba de salida de comunicación argumentada Grupo control – Grupo experimental	-2,414	71	0,009

**Nota.** Elaboración Propia con resultados de la prueba de salida – 2021.

La Tabla 5 muestra en cada una de las dimensiones un p-valor menor a 0,05 lo que indica que se debe rechazar la hipótesis nula y aceptar la hipótesis alternativa que señala: La aplicación de la clase invertida mejora el aprendizaje de las dimensiones manejo de algoritmos, resolución de problemas y comunicación argumentada de la variable aprendizaje optimización de funciones con derivadas.

### Prueba de la hipótesis comparando subgrupos en el grupo experimental

En la Tabla 6 se muestran los resultados, procesados con el estadístico ANOVA, de la prueba de salida aplicada a los subgrupos en el grupo experimental para la variable aprendizaje de optimización de funciones con derivadas.

**Tabla 6** - Prueba de hipótesis entre grupos en la muestra experimental - 2021

Variable	F	Gl	Sig. (unilateral)
Post prueba grupo experimental: entre grupos	0,589	3	0,628

**Nota.** Elaboración Propia con resultados de la prueba de salida – 2021.

La Tabla 6 muestra un p-valor mayor a 0,05 lo que indica que se debe aceptar la hipótesis nula que señala: No existe diferencia significativa entre los sub grupos en la muestra experimental. La revisión del material en forma individual o en equipo no implicó diferencia significativa en los promedios, en la prueba de salida; de la misma manera el revisar solo videos o videos y separatas, tampoco generó diferencias en los promedios. Estadísticamente los resultados fueron similares.

## Discusión

Los resultados obtenidos en la prueba de salida indican que los niveles de logro expresados en promedios del grupo experimental fueron mejores estadísticamente que los del grupo control. La aplicación de la clase invertida propició dicha diferencia, reafirmando lo obtenido por Fúneme (2019); Salas-Ruedas y Lugo-García (2018) quienes experimentaron la clase invertida elaborando videos para temas de aplicaciones de las derivadas, dando principal importancia al manejo de las definiciones, propiedades y reglas que configuraron la teoría básica sobre el tema. Estos resultados son coherentes con lo hallado por Sola et al. (2019) que, el *Flipped Classroom* mejora el rendimiento académico de los estudiantes, conclusión derivada del análisis de las investigaciones mostradas en artículos científicos indizados en la base de datos de la Web Of Science (WOS) y Scopus.

En la mayoría de investigaciones, el beneficio en el aprendizaje se centra en aspectos teóricos: un mejor dominio de la teoría, mejor comprensión del objeto estudiado (SALAS-RUEDAS; LUGO-GARCÍA, 2018; BARROS; MARTÍNEZ, 2018; FÚNEME, 2019) porque, tanto en la revisión antes de la clase, como en parte de la clase, se dedican a consolidar el sustento teórico.

A diferencia de los antecedentes de investigación revisados, en la presente investigación se verificó la influencia de la clase invertida en el desarrollo de las capacidades de Manejo de algoritmos, Resolución de problemas y Comunicación argumentada, que refieren la aplicación de la teoría, debidamente argumentada en la resolución de problemas, trascendiendo así la comprensión teórica.

En las clases los estudiantes participaron más, con ideas sobre el tema aprendido en la revisión previa, del material de estudio, las que fueron contrastadas por sus pares. La calidad de la información y participación mejoró. No fueron ideas contrapuestas, cada quien opinó a su estilo y al final se consolidaron los supuestos teóricos y los procedimientos de resolución de problemas. Fue un espacio de ensayo de la comunicación argumentada que luego se les exigió en la prueba de salida. Como manifiesta Fornons y Palau (2016) y también Baque-Reyes y Artega-Pita (2021) los estudiantes mejoraron su nivel de satisfacción por el trabajo en el área de matemática, además de mejorar sus actitudes, su nivel de involucramiento en su aprendizaje y el rendimiento académico en matemática.

Los estudiantes tuvieron horas adicionales de revisión del material de estudio que sirvió para que participaran activamente en las clases, en la consolidación de los supuestos teóricos con conocimientos referenciados. Los estudiantes tuvieron una mayor presión y más volumen de trabajo académico, que en aquellas que se impartían de forma tradicional (LÓPEZ, 2019). El tiempo invertido dio como resultado una mejora de la calidad de información, porque los estudiantes tuvieron la oportunidad de practicar con fundamentos, logrando aprendizajes con mejor contenido y calidad; obteniendo así un mejor aprovechamiento del tiempo de clase.

El material de estudio estuvo a disposición de los estudiantes días antes de las clases, ellos

podieron descargar y revisar las veces que estimaron necesario y las partes que necesitaban reforzar, tal como sucedió en los trabajos de González y Huerta (2019) y de Cano-Guevara y García-Quintero (2016) quienes concluyeron que, con esta estrategia los estudiantes revisan y aprenden acorde a sus ritmos de aprendizaje. La revisión del material de estudio, individual o en equipo, se realizaron fuera del horario de clases, sin la supervisión del docente, por lo que quedó a criterio de cada miembro del equipo, el nivel de atención y compromiso; promoviéndose de este modo el aprendizaje autónomo.

El confinamiento social por COVID-19 ha generado un conjunto de repercusiones negativas en la salud de los estudiantes y docentes (CAMPOS et al., 2020) también en el crecimiento económico de los países; pero al mismo tiempo se constituyó en una oportunidad para explorar nuevos escenarios de aprendizaje. Se masificó la educación a distancia, las instituciones educativas se acondicionaron a la virtualidad según los recursos tecnológicos y humanos con los que contaban. En las universidades se implementaron plataformas de aprendizaje interactivas que propició el aprendizaje autónomo (VENTOSILLA et al., 2021; ESTEBAN et al., 2022).

De retorno a la presencialidad, queda como tarea seguir poniendo en práctica las experiencias exitosas de la virtualidad y experimentar nuevas estrategias que complementen las clases presenciales, a fin de promover el desarrollo de competencias en los estudiantes universitarios.

## Referencias

AKÇAYIR, G.; AKÇAYIR, M. The flipped classroom: A review of its advantages and challenges. **Computers & Education**, n. 126, p. 334-335, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.07.021>

AWIDI, I. T.; PAYNTER, M. The impact of a flipped classroom approach on student learning experience. **Computers & Education**, n. 128, p. 269-283, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.09.013>

BANOY, W. **Clase invertida**. Nuevas tendencias en educación mediadas por tecnología. Bogotá: Uniminuto, 2020.

BAQUE-REYES, L. S.; ARTEAGA-PITA, I. G. Análisis del método de aprendizaje de clase invertida, como estrategia de enseñanza para las matemáticas. **Polo del Conocimiento**, Manta, v. 6, n. 5, 479-495, 2021. DOI: <http://dx.doi.org/10.23857/pc.v6i5.2674>

BARROS, V. M.; MARTÍNEZ, M. B. Aula invertida en la enseñanza de algebra en la educación superior. **Espiraes Revistas Multidisciplinaria de Investigación**, [s.l.], v. 2, n. 13, p. 12-23, 2018.

CAMPOS, L. L.; JAIMES, M. Á.; VILLAVICENCIO, M. C.; ESTEBAN, E. R. Bienestar y afrontamiento psicológico de estudiantes universitarios en estado de confinamiento por COVID-19. **Revista Inclusiones**, [s.l.], v. 7, n. Especial, p. 377-398, 2020.

CANO-GUEVARA, J. A.; GARCÍA-QUINTERO, J. A. Flipped Classroom en la enseñanza de lógica y algoritmos en la universidad de la amazonia; una sistematización de experiencias. **Revista Científica**, Bogotá, n. 26, p. 53-61, 2016. DOI: <https://doi.org/10.14483/23448350.11090>

CHUKUSOL, CH.; PIRIYASURAWONG, P. Development of Flipped Classroom using Cloud-Based Learning and Board Games Model to Enhance Critical Thinking Skills. **TEM Journal**, v. 11, n. 1, p. 94-103, 2022. DOI: <https://doi.org/10.18421/TEM111-11>

CORTÉS, L. M.; RIVEROS, C. M. **El aula invertida como herramienta TIC para el aprendizaje de la asignatura de sistemas en el grado primero en el colegio San Nicolás del Espinal Tolima** (Titulando en Ingeniería de Sistemas) - Universidad Piloto de Colombia Seccional Alto Magdalena, Colombia, 2019.

DURÁN, J. F.; GODOY, F. J.; RODRÍGUEZ, J. **Las TIC en las aulas de enseñanza superior**. Barcelona: Gedisa, 2018.

ESTEBAN, E.R.; ROJAS, A. R.; CALLUPE, S. F.; CHÁVEZ, J. Desarrollo del currículo estructurado con base en proyectos formativos: Experiencia universitaria durante confinamiento social. **Espiral. Cuadernos del profesorado**, Almería, v. 15, n. 30, p. 24-37, 2022. DOI: <https://doi.org/10.25115/ecp.v15i30.5615>

FORNONS, V.; PALAU, R. F. Flipped classroom en la asignatura de matemáticas de tercero de educación secundaria obligatoria. **EDUTECH: Revista Electrónica de Tecnología Educativa**, n. 55, marzo, 2016. DOI: <https://doi.org/10.21556/edutec.2016.55.284>

FÚNEME, C. C. Aplicaciones de la derivada a través del aula invertida. **Tecné, Episteme y Didaxis: TED**, n. 45, p. 159-174, 2019. DOI: <https://doi.org/10.17227/ted.num45-9840>

GONZÁLEZ, M. O.; HUERTA, P. Experiencia del aula invertida para promover estudiantes prosumidores del nivel superior. **RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia**, v. 22, n. 2, p. 245-263, 2019. DOI: <https://doi.org/10.5944/ried.22.2.23065>

GUTIÉRREZ, R. Epistemología genética. **Revista Psicológica Herediana**, Lima, v. 7, n. 1-2, p. 31-36, 2012.

GUZMÁN, A. M.; BUENO, C. A.; MARTÍNEZ, Y. M. **Recursos materiales audiovisuales basados en las Tecnologías de la Información y Comunicación aplicadas a la educación**. Machala: UTMACH, 2020.

HERNÁNDEZ, R.; FERNÁNDEZ, C.; BAPTISTA, M. P. **Metodología de la investigación**. 6. ed. México: McGraw.Hill, 2014.

HERNÁNDEZ-SAMPIERI, R.; MENDOZA, C. P. **Metodología de la investigación: Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta**. México: McGrawHill, 2018.

JIMÉNEZ, A.; PINEDA, L. M. Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. **Educación y Ciencia**, Boyacá, n. 16, p. 101-116, 2013.

LAVADO, L. Uso del cine como herramienta en el proceso de enseñanza–aprendizaje en los doctorados de medicina y ciencias de la salud. **Horizonte Médico**, Lima, v. 20, n. 3, 2020. DOI: <https://doi.org/10.24265/horizmed.2020.v20n3.09>

LOMBARDINIA, CH.; LAKKALAB, M.; MUUKKONENC, H. The impact of the flipped classroom in a principles of microeconomics course: evidence from a quasi-experiment with two flipped classroom designs. **International Review of Economics Education**, n. 29, p. 14-28,

2018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.iree.2018.01.003>

LÓPEZ, V., K. A. Experiencia de un curso diseñado con aula invertida en un contexto educativo tradicional. *In: RUIZ-VELASCO, E.; BÁRCENAS-LÓPEZ, J. (coord.). Edutecnología y Aprendizaje 4.0*. México: SOMECE, 2019. p. 259-265.

MALASPINA, U. Resolución de problemas y estímulo del pensamiento optimizador en la educación básica. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, n. 10, p. 165-181, 2012.

MEDINA, J. L. **La docencia universitaria mediante el enfoque del aula invertida**. Barcelona: Octaedro, 2016.

MOHAMED, H.; LAMIA, M. Implementing flipped classroom that used an intelligent tutoring system into learning process. **Computers & Education**, v. 124, p. 62-76, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.05.011>

NUNNALLY, J. **Teoría psicométrica**. México: McGraw Hill, 1987.

PIÑERO, M. L.; ESTEBAN, E. R.; VANGA, M. G.; RIVERA, M. E. Hacia una reconceptualización de la investigación cualitativa. **Revista de Filosofía**, Maracaibo, v. 39, n. 2, p. 524-536, 2022. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.7312693>

RODRÍGUEZ, L. La teoría del aprendizaje significativo: una revisión aplicable a la escuela actual. **IN**. Revista electrónica de investigación e Innovación Educativa y Socioeducativa, v. 3, n. 1, p. 29-50, 2011.

ROSELLI, N. D. La disyuntiva individual-grupal. Comparación entre dos modelos alternativos de enseñanza en la universidad. **Ciencia, docencia y tecnología**, v. 19, n. 36, p. 87-118, 2008.

SAHIN A., CAVLAZOGLU, B.; ZEYTUNCU, Y. E. Flipping a College Calculus Course: A Case Study. **Educational Technology & Society**, v. 18, n. 3, p. 142-152, 2015.

SALAS-RUEDA, R. A.; LUGO-GARCÍA, J. L. Impacto del aula invertida durante el proceso educativo superior sobre las derivadas considerando la ciencia de datos y el aprendizaje automático. **EDMETIC: Revista de Educación Mediática y TIC**, Córdoba, v. 8, n. 1, p. 147-170, 2018. DOI: <https://doi.org/10.21071/edmetic.v8i1.9542>

RUT, P. **Aula invertida, metodología del siglo XXI**. Universitat de les Illes Balears, España, 2017.

SOLA, T.; AZNAR, I.; ROMERO, J. M.; RODRÍGUEZ-GARCÍA, A. M. Eficacia del método flipped classroom en la universidad: Meta-análisis de la producción científica de impacto. **Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación**, Madrid, v. 17, n. 1, p. 25-38, 2019. DOI: <https://doi.org/10.15366/reice2019.17.1.002>

VENTOSILLA, D. N.; SANTA MARÍA, H. R.; OSTOS, F.; FLORES, A. M. Aula invertida como herramienta para el logro de aprendizaje autónomo en estudiantes universitarios. **Propósitos y Representaciones**, Lima, v. 9, n. 1, 2021. DOI: <https://dx.doi.org/10.20511/pyr2021.v9n1.1043>

VILLALBA, M. T.; CASTILLA, G.; MARTÍNEZ, S.; JIMÉNEZ, E.; HARTYÁNYI, M.,

SEDIVINE, LL.; CHOGYELKÁNÉ, LL.; TERINGER, A.; EKERT, S.; COAKLEY, D.; CRONIN, S.; MANÉNOVÁ, M.; TAUCHMANOVA, V. **Innovación en la educación profesional**. Flipped classroom en la práctica. Hungría: ITStudy Education and Research, 2018

WINTER, R. S. **Manual de trabajo en equipo**. Madrid: Díaz de Santos, 2000.

ZAINUDDIN, Z. Students' learning performance and perceived motivation in gamified flipped-class instruction. **Computer & Education**, n. 126, p. 75-88, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.07.003>

*Recibido: 04/12/2022*

*Versión corregida: 28/02/2023*

*Aceptado: 01/03/2023*

*Publicado online: 07/03/2023*