

Enseñanza del razonamiento proporcional desde la historia y la epistemología: Una mirada inclusiva

Teaching proportional reasoning based on history and epistemology: An inclusive view

Ensino do raciocínio proporcional baseado na história e epistemologia: Uma visão inclusiva

Jaiver David Rey Gómez^I

Sandra Evelyn Parada Rico^{II}

RESUMEN

Este documento presenta resultados de una investigación que responde a: ¿Cómo la mirada histórica-epistemológica del razonamiento proporcional posibilita su estudio y favorece la inclusión en clase de Matemáticas? La investigación se fundamentó teóricamente en los acercamientos para la enseñanza del razonamiento proporcional y en las formas en las que interviene la historia de las Matemáticas en su enseñanza. Por otra parte, se valoraron los principios y pautas del Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) para garantizar la inclusión de todos los estudiantes. La metodología se desarrolló en tres fases: revisión de los elementos teóricos y conceptuales, planteamiento del diseño didáctico y valoración mediante juicio experto. De allí, emergieron los resultados, los cuales permitieron reconocer el uso de la historia de las Matemáticas como un recurso significativo para la comprensión de las matemáticas y para la promoción de una educación inclusiva.

Palabras clave: Razonamiento Proporcional. Historia. Epistemología. Inclusión. Currículo.

ABSTRACT

The current document shows the results of research that responds to the question: "How does the historical-epistemological approach to proportional reasoning enable and favor its inclusion in math class?" The research was theoretically based on the approaches to teaching proportional reasoning and the ways in which the history of mathematics affects its teaching. Moreover, the universal learning design (ULD) guidelines and principles were reviewed to ensure the inclusion of all students. The methodology was developed in three phases: review of the theoretical and conceptual elements, approach to the didactic design and evaluation by means of expert judgment. From there arose the results, which allowed to acknowledge the use of the history of mathematics as a meaningful resource for understanding math and promoting inclusive education.

Keywords: Proportional Reasoning. History. Epistemology. Inclusion. Curriculum.

^IUniversidad Industrial de Santander, Santander, Colombia. Correo electrónico: jaiverdavidrey@hotmail.com  <https://orcid.org/0000-0003-0109-7361>

^{II}Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia. Correo electrónico: sanevepa@uis.edu.co  <https://orcid.org/0000-0001-5468-0943>

RESUMO

Este documento apresenta resultados de uma investigação que responde a como a visão histórico-epistemológica do raciocínio proporcional possibilita seu estudo e favorece sua inclusão nas aulas de matemática. A pesquisa foi baseada teoricamente em abordagens para o ensino do raciocínio proporcional e nas formas com que a história da matemática intervém em seu ensino. Por outro lado, foram valorizados os princípios e diretrizes do universal learning design (DUA) para garantir a inclusão de todos os alunos. A metodologia foi desenvolvida em três fases: revisão dos elementos teóricos e conceituais, abordagem da concepção didática e avaliação por meio de pareceres de peritos. A partir daí emergiram os resultados que permitiram reconhecer o uso da história da matemática como recurso significativo para a compreensão da matemática e para a promoção da educação inclusiva.

Palavras-chave: Raciocínio Proporcional. História. Epistemologia. Inclusão. Currículo.

INTRODUCCIÓN

La educación inclusiva es exaltada internacionalmente desde la Declaración Universal de los Derechos Humanos (ONU, 1948). De este modo, la mayoría de los países asumen en la actualidad un modelo biopsicosocial de la inclusión, en el que las posibles trastornos, limitaciones, dificultades o capacidades se asumen como una característica más del sujeto. No obstante, existe una desconexión entre lo que se propone para la educación inclusiva y las realidades del aula, y a pesar de que se han hecho importantes avances en los últimos años, los sistemas educativos aún resultan insuficiente para atender integralmente a todos los estudiantes. Al respecto se afirma que persisten las formas tradicionales de enseñanza que distan de una educación para todos (Arnaiz, 2000).

Colombia no es ajena a la situación antes descrita, si bien, cuenta con un marco normativo sólido, según cifras del Departamento Administrativo Nacional de Estadística (Dane, 2022), el 81,7% de las instituciones educativas colombianas tienen un modelo pedagógico tradicional con principios orientados a la transmisión de conocimientos, lo que agudiza el alto nivel de deserción escolar por parte de personas con características de aprendizaje diferentes, quienes solo logran terminar la educación básica primaria (Lastre, Anaya y Martínez, 2019).

Lo anterior, es una importante muestra de que discutir y proponer acciones para favorecer la educación inclusiva es una tarea compleja pero prioritaria para la sociedad. En este sentido se sostiene que alcanzar una educación inclusiva requiere tener en cuenta tres dimensiones interconectadas: cultura, políticas y prácticas; para eliminar, o en su defecto minimizar las barreras de aprendizaje y participación de los estudiantes (Booth y Ainscow, 2000).

En particular, desde la investigación que aquí se reporta, se planteó un acercamiento a la inclusión mediante el uso de la Historia y la Epistemología como un recurso didáctico flexible y adaptable para el estudio del razonamiento proporcional. Lo anterior teniendo en cuenta las investigaciones de (Oller, Marcén y Gairín, 2013; Guacaneme, 2016) los cuales reconocen que el razonamiento proporcional posee una historia prolífica que además de suscitar la discusión en la clase de Matemáticas, permiten orientar y enriquecer el currículo.

El componente histórico-epistemológico en la enseñanza de las Matemáticas ha sido valorado positivamente por autores como (Guzmán, 1993; Gonzáles, 2004; D'Amore, 2011; Oller-Marcé y Gairín, 2013; Guacaneme, 2016; Gutiérrez, 2019), quienes reconocen que este posibilita la evolución de ideas y el desarrollo de los objetos matemáticos para favorecer su comprensión. Ahora bien, para que los acercamientos desde la clase de Matemáticas posibiliten la inclusión se siguen los principios y pautas del DUA propuestos por (Alba Pastor, 2018).

Por todo lo anterior, esta investigación tuvo por objetivo plantear y valorar un diseño didáctico desde la Historia y la Epistemología del razonamiento proporcional para favorecer la educación inclusiva en clase de matemáticas de quinto grado. De esta manera, en el siguiente apartado se exponen los elementos teóricos y conceptuales utilizados para tal fin.

ELEMENTOS TEÓRICOS Y CONCEPTUALES

Los elementos teóricos y conceptuales se centran en tres elementos, fundamentalmente: *el razonamiento proporcional desde la Educación Matemática; la Historia y Epistemología del razonamiento proporcional como recurso didáctico; la normativa y orientaciones para la inclusión educativa; y la propuesta curricular* en la cual se enmarca este trabajo. A continuación, estos se describen brevemente.

EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En las últimas seis décadas el razonamiento proporcional ha ocupado un lugar significativo dentro de los estudios en Educación Matemática (Valverde Soto y Castro Martínez, 2009; Obando, Vasco y Arboleda, 2014), lo cual ha permitido una conceptualización suficiente al respecto. En este sentido, Mochón Cohen (2012) reconoce el razonamiento proporcional como la facultad de sustentar propiedades sobre la relación existente entre cuatro cantidades. En particular, este autor, señala dos ideas esenciales que respectan sobre este objeto matemático, a saber: la *comparación* y la *variación*.

La *comparación* es un foco principal dentro del razonamiento proporcional, ya que con esta idea se desarrolló el concepto ulterior de razón, el cual se realiza mediante comparaciones multiplicativas. Sobre lo anterior, Mochón Cohen (2012) plantea que el concepto sobre el cual se basa el razonamiento proporcional es el de razón, y de allí emergen otras ideas como la constancia de la razón, la de cantidades relativas, la equivalencia de razones, entre otras. Por otro lado, para comprender el comportamiento de las relaciones directamente proporcionales es fundamental el concepto de *variación* entre dos cantidades. Teniendo como caso particular, el énfasis en la variación existente en una relación proporcional directa (Mochón Cohen, 2012).

Referente a lo anterior, diversos autores han propuesto unas etapas del desarrollo del razonamiento proporcional que se recogen en (Mochón Cohen, 2021), las cuales son: *i) Incompleta, ii) Cualitativa, iii) Aditiva, iv) Pre proporcional, y v) Proporcional*. Con base en lo anterior, este mismo autor, propone unos acercamientos para su desarrollo, los cuales se adaptaron en el trabajo de (Rey Gómez, 2022) como se esboza a continuación:

- i) Uso de tablas y razones intuitivas:* desde este acercamiento el estudiante organiza mediante arreglos tabulares los datos recogidos de una situación directamente proporcional, y a partir de ahí, deduce propiedades y comportamientos de este tipo de relaciones a través de un lenguaje sencillo e intuitivo.
- ii) Estrategia unitaria:* aquí se pretende que el estudiante reconozca el valor asociado a la unidad de algunas de las magnitudes en juego, con esto, puede resolver problemas multiplicando las otras cantidades por el valor de la unidad.
- iii) Razón de cambio:* el estudiante comprende la relación covariacional entre las magnitudes, y a este comportamiento le asocia su razón de cambio. También, se espera que el estudiante transite a este acercamiento sin necesariamente abandonar el uso de tablas.
- iv) Constancia de la razón y algoritmia:* en este acercamiento el estudiante comprende propiedades de una relación directamente proporcional, lo que posibilita manipular el algoritmo de la regla de tres, pero soportado en los acercamientos precedentes.

LA HISTORIA Y LA EPISTEMOLOGÍA DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL COMO RECURSO DIDÁCTICO

La revisión histórica-epistemológica del razonamiento proporcional da luces para planificar la enseñanza (Oller-Marcén y Gairín, 2013). Si bien, la literatura reporta resultados positivos al incluir aspectos históricos y epistemológicos en la clase de Matemáticas, no se encuentran muchas experiencias prácticas al respecto. Un análisis de la evolución del objeto matemático se hizo en

(Rey Gómez, 2022) y de allí emergió la estructura para organizar el diseño, lo que permitió también fundamentarlo en el proceso de resolución de problemas, pensado como un macroproceso, y los otros procesos matemáticos como coadyuvante de la enseñanza. Una descripción detallada de la integración de estos aspectos se puede encontrar en el trabajo antes citado.

Ahora, para definir la forma en que se usa la Historia y la Epistemología como recurso didáctico, este trabajo usa las tres formas en las que interviene la Historia de las Matemáticas en su enseñanza (Guacaneme, 2016). Estas se esbozan a continuación:

- i) *La Historia de las Matemáticas como uso*: esta forma propone el uso de recursos históricos (referencias, biografías, problemas, anécdotas, hitos, entre otros), para enriquecer la clase de Matemáticas y captar la atención de los estudiantes. Cada objeto matemático trae consigo una evolución histórica que se debe aprovechar para la enseñanza.
- ii) *La Historia de las Matemáticas como integración*: de acuerdo con el autor, integrar la clase de Matemáticas con la historia, permite fundamentarla epistemológicamente. Aquí, no solo se usa la historia para enriquecer la enseñanza, sino como posibilitadora de aprendizaje por parte de los estudiantes. Partiendo de la idea de que las Matemáticas conviven con el ser humano, y que éstas forman parte de la historia compartida por todos.
- iii) *La Historia de las Matemáticas como permeador*: la Historia permite guiar la enseñanza, por ello, el diseño que se propone desde esta investigación se vale de la Historia para orientar las situaciones, actividades, enunciados, problemas, etc. En (Rey Gómez, 2022) se enfatiza en el potencial que tiene este recurso para el desarrollo curricular (planeación y evaluación).

NORMATIVA Y ORIENTACIONES PARA LA EDUCACIÓN INCLUSIVA

En el marco de este trabajo, la educación inclusiva entiende la diversidad como aquella relación que las personas establecen consigo mismas y con los otros, superando la mirada de *lo diferente* como una serie de fronteras que separan lo que se considera distinto; y como un proceso continuo que responde a las características diferenciadas de los estudiantes (en cuanto a intereses, posibilidades, expectativas, limitaciones, etc.) para promover en ellos su desarrollo integral. Normativamente Colombia integra el Diseño Universal de Aprendizaje (DUA), el cual se concibe como una propuesta o instrumento para atender la educación inclusiva.

Al respecto, En (Velasco Méndez, 2022) que cita a (Alba Pastor, 2018) se reconoce tres principios que debe conllevar el DUA en clase de Matemáticas, integrado cada uno con tres pautas; las cuales se relacionan a continuación:

- i) *Principio de representación*: para ello se debe proporcionar: i) diferentes opciones para percibir la información; ii) múltiples opciones para el lenguaje y los símbolos matemáticos; y iii) opciones para la comprensión.
- ii) *Principio de acción y expresión*: para ello se requiere proporcionar: iv) múltiples medios físicos de acción; v) opciones para la comunicación matemáticas; y vi) opciones para las funciones ejecutivas.
- iii) *Principio de implicación*: este principio requiere que se proporcionen vii) múltiples formas para captar el interés; viii) opciones para mantener esfuerzo y persistencia; y ix) opciones para la autorregulación.

LA PROPUESTA CURRICULAR

La propuesta curricular que se usa en este trabajo surge como resultado de un proceso de investigación que tiene por objetivo construir diseños didácticos de matemáticas para la educación básica, ajustados a una estructura curricular flexible y adaptable, con el uso de diferentes tecnologías que permite la inclusión. Estos diseños didácticos son entendidos como una planificación estructurada

para orientar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, proporcionando una serie de actividades concretas con su respectiva fundamentación teórica y recursos con el fin de promover la actividad matemática del aula y atender la educación inclusiva. Esta propuesta se describe en (Jacóme Anaya y Parada Rico, 2023) y se caracteriza por *la flexibilidad* que está relacionada con la adaptabilidad para responder a la diversidad cultural y social de los estudiantes, por lo que el currículo debe ser susceptible de revisión, modificación y permanente actualización (MEN, 2013); y *la adaptabilidad* que implica que la educación debe ser compatible con los requerimientos, intereses y condiciones particulares de todos los niños en la sociedad (Köster, 2016).

Desde esta propuesta se determinó abordar los objetos matemáticos de estudio con cuatro (4) niveles de profundidad, teniendo en cuenta un *enfoque diferencial* donde se identifican las características y necesidades particulares de las personas y poblaciones, se consolidan respuestas diferenciales, se materializan sus derechos y se suprime la exclusión social. La descripción amplia de la propuesta se puede visualizar en (Parada Rico, 2023).

Estos niveles se describen a continuación:

- i) *Nivel 1:* proporciona múltiples representaciones del objeto matemático de estudio, especialmente representaciones concretas. Las situaciones problemas llevan instrucciones sencillas, con poco texto, con mayor contenido visual o auditivo que proporcionan múltiples formas de acción y expresión como el uso de palabras claves mediante texto alternativo con el fin de activar la percepción auditiva, visual y/o táctil de los estudiantes, por lo que se requiere acompañamiento permanente del profesor, por ejemplo, ayudándolo a hacer conexiones y recordándole reiterativamente información. El diseño de este nivel permite diferentes formas de implicación, a través de trabajo colaborativo con pares y socialización permanente de sus avances frente al grupo, esto mediante el tratamiento de situaciones y necesidades cotidianas.
- ii) *Nivel 2:* se priorizan actividades de resolución de problemas que impliquen la interpretación de información presentada de forma verbal, numérica o gráfica, mediante material visual, auditivo y/o concreto. El diseño proporciona múltiples formas de acción y expresión al utilizar situaciones culturalmente significativas de los estudiantes. Las situaciones problemas para este nivel contienen instrucciones sencillas con texto moderado que implican la conexión de información para comprender y resolver una situación. El diseño proporciona, variadas formas de acción y expresión dando lugar a las expresiones orales, gestuales, pictóricas, entre otras posibilidades de producción, en las que propone la mediación del docente que permita ir valorando el logro del propósito previsto. En este nivel además del trabajo colaborativo se requiere ir dando autonomía para ir fortalecimiento de conocimientos aprendidos en la resolución de situaciones cotidianas. Para ello, el profesor puede dar apoyo con material o representaciones concretas que puede ir retirando en la medida que el estudiante vaya avanzando.
- iii) *Nivel 3:* se priorizan actividades de resolución de problemas que impliquen la abstracción de información presentada de forma verbal, numérica, gráfica, tabular con diversas y variadas tecnologías (como pueden ser los entornos virtuales interactivos o software) permitiendo la manipulación, diferentes estrategias de resolución de problemas. Las actividades están mayormente diseñadas para que los estudiantes construyan expresiones numéricas o algebraicas que permitan modelar una situación problema del contexto, que posibilitan el desarrollo de procesos matemáticos abstractos y con un lenguaje matemático preciso. El diseño proporciona variadas formas de acción y expresión haciendo uso del lenguaje matemático acorde con el objeto de estudio, en las que el docente medie con el estudiante para acercarlo a los objetos matemáticos según el propósito establecido, promoviendo la discusión sobre situaciones del contexto matemático y cotidiano.

iv) *Nivel 4*: se privilegian actividades de resolución, deducción y planteamiento de conjeturas matemáticas con el uso de lenguaje matemático formal haciendo uso de diversas y variadas tecnologías (como pueden ser los entornos virtuales interactivos o software) permitiendo la visualización, la argumentación y el desarrollo de estrategias de resolución de problemas. Las actividades están mayormente diseñadas pero que los estudiantes modelen situaciones del contexto (matemático y no matemático) justificando y argumentando sus procedimientos y deducciones haciendo uso del lenguaje matemático formal propio del objeto matemático de estudio. De igual manera en este diseño el docente asumirá la postura de mediador, coadyuvando al estudiante para que acerque y profundice en sus los objetos de estudio hasta donde su interés, motivación y creatividad se lo permita, invitándolo a discutir y exponer avances.

La propuesta se puede visualizar en (Parada Rico, 2023).

METODOLOGÍA

La investigación que aquí se reporte tiene características de diseño curricular, desde la perspectiva de (Díaz-Barriga *et al.*, 1991). En este sentido, para responder a la pregunta de investigación se plantearon y desarrollaron tres fases: *i) revisión de los elementos teóricos y conceptuales; ii) Planteamiento del diseño didáctico; y iii) valoración por juicio experto*. Estas fases se explicitan a continuación.

FASE 1. REVISIÓN DE ELEMENTOS TEÓRICOS Y CONCEPTUALES

Esta fase consistió en la revisión de literatura, primero sobre el objeto matemático de estudio (el razonamiento proporcional) que responde al *qué* de la investigación, luego sobre la Historia y la Epistemología de la Matemática como recurso didáctico, lo que responde al *cómo* de la investigación, y finalmente sobre la inclusión educativa mediante el DUA, lo cual responde al *para qué*. Posterior a que se integraran estos elementos, se usó la propuesta curricular esbozada en la sección 2.4, y con esto se dio paso al planteamiento del diseño didáctico.

FASE 2. PLANTEAMIENTO DEL DISEÑO DIDÁCTICO

Teniendo en cuenta los elementos preliminarmente revisados, se construyó un diseño curricular orientado a responder la pregunta: *¿Cómo se han resuelto problemas en la Historia usando razones y proporciones?* Para el que se definieron propósitos de aprendizaje, enmarcados en el pensamiento numérico y el pensamiento variacional, asociados también, con los procesos matemáticos definidos por el MEN (1998). Teniendo en cuenta lo explicado anteriormente sobre la propuesta curricular en la que se enmarca el estudio aquí reportado, se decidió trabajar en dos niveles de profundidad (Nivel 2 y Nivel 3). Los niveles 1 y 4 en este momento están en proceso de revisión.

El diseño didáctico planteado consta de: *i) malla curricular; ii) hoja de trabajo para el estudiante y; iii) orientaciones para el profesor*. Estos se describen a continuación.

- i) En la malla curricular se presenta una tabla en la que aparecen los propósitos de las actividades en cada nivel de profundidad, asociados con los procesos matemáticos, atendiendo los lineamientos del MEN (1998) y lo planteado por diversos autores respecto al desarrollo de estos. Esta malla, para los niveles trabajados se pueda encontrar en (Rey Gómez, 2022).
- ii) La hoja de trabajo del estudiante para cada nivel de profundidad, que se organiza en cuatro momentos de actividad matemática:
 - *Primer momento*: introducción de un objeto matemático a partir del contexto con actividades dinámicas para la valoración y conexión con conocimientos previos.
 - *Segundo momento*: se construyen conceptos matemáticos emergentes de la situación planeada en el primer momento. Aquí se busca construir o deducir propiedades, relaciones, representaciones y conexiones del objeto matemático de estudio con el contexto.

- *Tercer momento:* espacio donde los estudiantes ponen en práctica y afianzan los saberes construidos mediante actividades dinámicas, de ejercitación, aplicación, problematización, juegos, proyectos, etc.
 - *Cuarto momento:* tiempo para valorar los desempeños de los estudiantes, reconociendo las diferencias en los ritmos y maneras de aprender, esto puede ser mediante el desarrollo de actividades retadoras, dinámicas o problemas que permitan valorar los aprendizajes.
- iii) *Orientaciones para el profesor:* teniendo en cuenta que el logro de los objetivos depende de las intervenciones del docente; se construyó un documento con recomendaciones didácticas, teóricas y metodológicas para implementar el diseño con el fin de orientar la manera para direccionar y flexibilizar su desarrollo de acuerdo con las características de los estudiantes.

FASE 3. VALORACIÓN POR JUICIO EXPERTO

El diseño fue revisado mediante la técnica de *juicio experto*, entendido como un proceso en el que una o varias personas con conocimiento del tema y trayectoria en el campo disciplinar evalúa un producto para mejorarlo. Para tal fin, se usó una rúbrica establecida en el trabajo de (Jácome Anaya y Parada Rico, 2023). Esta rúbrica evalúa el nivel de cumplimiento del diseño de acuerdo con el DUA, y los aspectos teóricos, epistemológicos y didácticos del objeto matemático de estudio. Los resultados demostraron un nivel altamente satisfactorio de cumplimiento. La aplicación de la rúbrica se describe con más detalle en la sección 5.

EL DISEÑO DIDÁCTICO: ¿CÓMO SE HAN RESUELTO PROBLEMAS EN LA HISTORIA USANDO RAZONES Y PROPORCIONES?

Como se mencionó el diseño se organiza y se describe en cuatro momentos de actividad matemática. A continuación, para efecto de síntesis, se describirá brevemente el diseño de profundidad 2. Los lectores podrán encontrar en (Rey Gómez, 2022) los diseños completos junto con la malla curricular, la cartilla del estudiante y las orientaciones para el profesor.

PRIMER MOMENTO

El diseño inicia con una actividad titulada *Juguemos con la Tierra y la Luna* Figura 1. Esta es una actividad práctica que pretendió acercar al estudiante al concepto de razón como comparación

Figura 1 – Actividad práctica-nivel de profundidad 2.

¿Sabías qué?
El planeta Tierra se formó hace aproximadamente 4.500 millones de años, y solo cuenta con un satélite natural conocido como la Luna.



JUGUEMOS CON LA TIERRA Y LA LUNA!

1. Realicemos el siguiente experimento:

- Organícense en pequeños grupos, de acuerdo a la orientación del profesor.
- Tome la pita y los dos círculos de cartón que le entregará su profesor.
- Use la pita para calcular la longitud de la circunferencia y el diámetro de cada círculo y registre esas longitudes en la siguiente tabla:



	Tierra	Luna
Longitud de la circunferencia		
Diámetro		

2. Respondan grupalmente las siguientes preguntas de acuerdo al experimento

a) Complete la siguiente relación usando las longitudes de la Tierra.

$$\frac{\text{Longitud circunferencia de la Tierra}}{\text{Diámetro de la Tierra}} \rightarrow \frac{\quad}{\quad}$$

b) ¿Cuál es la relación entre la longitud de la circunferencia de la Luna y su diámetro?

$$\frac{\quad}{\quad}$$

¿Sabías qué?
Una razón (en matemáticas) es una forma de relacionar dos medidas por medio del cociente.



Fuente: Rey Gómez (2022).

entre dos magnitudes. Dada la finalidad de este momento, la cual era introducir el concepto de razón, no se integraron elementos históricos explícitos, pero si se orientaron las actividades hacia el cumplimiento de los principios del DUA.

SEGUNDO MOMENTO

En este momento se introduce la situación que se utiliza como contexto para el diseño. Al respecto se narra, desde una perspectiva histórica de razones y proporciones, un proyecto de Matemáticas. Allí se mencionan tres estudiantes que destacan: Jennifer, Daniel y David; quienes son los protagonistas del momento 2, 3 y 4, respectivamente, (Figura 2). En este momento, se muestra la consulta que hizo David sobre el libro *El Lilavati* (Figura 3).

Por tanto, las actividades giran en torno a un problema adaptado de *El Lilavati* que es un antiguo texto hindú en el cual un padre se dirige a su hija Lilavati, por medio de versos, para proponerle problemas matemáticos (Figura 4).

Figura 2 – Relato del profesor Javier.

El profesor Javier, realizó un proyecto de matemáticas con los niños de 5ºA sobre razones y proporciones. Para ello, les pidió que consultaran sobre el desarrollo histórico de este tema. Entre las tareas más interesantes que recibió el profesor destacó la de David, Daniel y Jennifer. Averigüemos por qué fueron las más interesantes para él...



Fuente: Rey Gómez (2022).

Figura 3 – La consulta de David.



David, es un niño muy curioso, le encanta ver películas, documentales y leer. Por ello, él centró su consulta en un problema del libro *Lilavati*, sobre repartos proporcionales.

Nota histórica

El *Lilavati* es un antiguo texto hindú, en el cual un padre se dirige a su hija Lilavati por medio de versos para proponerle problemas de Matemáticas.

Fuente: Rey Gómez (2022).

Figura 4 – Problema adaptado de El Lilavati.

Veamos el problema:



¡Oh! Inteligente Lilavati,
hermosa niña de ojos temblorosos,
si dos palas de azafrán valen 6 niskas,
dime al instante, tú, la mejor comerciante,
¿cuánto azafrán podrás comprar con 18
niskas?

*Una niska era una moneda de oro en la cultura india.

Fuente: Rey Gómez (2022).

Para la resolución del problema se guía a que el estudiante, de acuerdo con el primer acercamiento descrito en el apartado 2.1, a que diligencie la tabla Figura 5 y halle relaciones intuitivas que describirá cualitativamente (por ejemplo, una magnitud es la mitad de otra, el doble, la tercera parte, etc.). De allí, se empieza a dar sentido a la noción de relaciones directamente proporcionales. En las orientaciones al docente, se sugiere usar unas pistas propuestas en (Mochón Cohen, 2012) que se basan en usar relaciones fáciles de establecer por parte del estudiante. Por ejemplo: si 2 palas de azafrán valen 6 *niskas*, entonces 4 palas (el doble de 2) valen 12 *niskas* (que también es el doble de 6). De esta manera, el estudiante podría empezar a desarrollar un razonamiento pre-proporcional acercándose a las ideas de comparación y variación.

Figura 5 – Apoyo tabular para resolver el problema de El Lilavati.

Palas de azafrán		Niskas	
2		6	
4			
6			

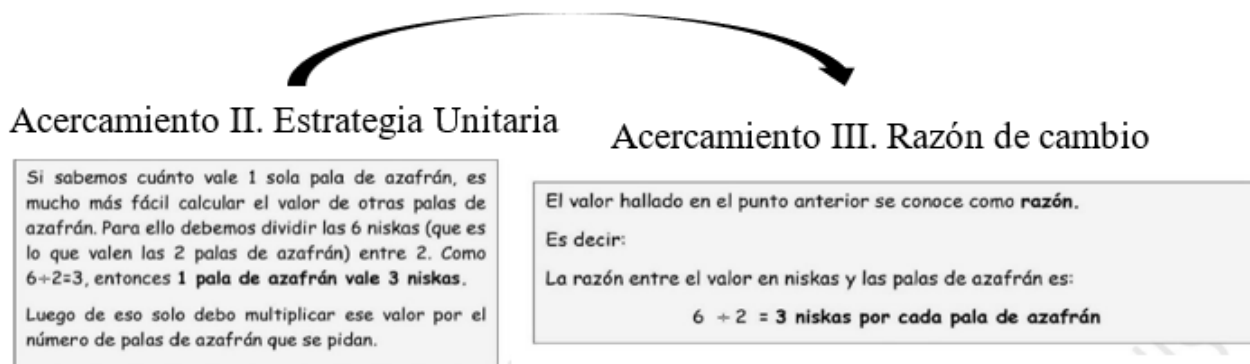
Fuente: Rey Gómez (2022).

De manera posterior, se explica en el diseño el método chino de la *lǚ*, cuyo proceso es similar al acercamiento de la *estrategia unitaria*, que se abordó en el apartado 1.1.1. Con esta explicación se espera que el estudiante comprenda distintas estrategias para hallar un valor desconocido en una situación de proporcionalidad directa, sin la necesidad de acudir al algoritmo conocido. Con esto se espera que ulteriormente el estudiante comprenda la algoritmia, que se introduce hacia el final del diseño. Aquí, la Historia impacta el currículo, no solo como ornamento, sino como esencia que se centra en la construcción epistemológica del objeto matemático de estudio.

Apoyados en esta estrategia, el estudiante debe resolver el problema asociando la pala de azafrán con 3 *niskas*. Lo anterior, también permitió introducir el concepto de razón, para lo cual el estudiante debe reconocer la relación numérica entre los valores de las dos columnas de la tabla. En consecuencia, en este momento se inicia el tercer acercamiento denominado *razón de cambio*. Entonces, el estudiante debe comprender no solo que 3 *niskas* corresponden a 1 pala de azafrán (*estrategia unitaria*); sino debe explicitar la razón 3 *niskas* por cada pala de azafrán (Figura 6).

Las dos estrategias mencionadas favorecen múltiples formas de representación de la información, propician la creación de significados y permiten un soporte conceptual para algoritmos posteriores. Ahora bien, para finalizar el segundo momento, se introdujo de manera implícita el objeto matemático de estudio, por medio de un lenguaje numérico Figura 7 que se amplió en momentos posteriores.

Figura 6 – Transición de la estrategia unitaria a la razón de cambio.



Fuente: Rey Gómez (2022).

Figura 7 – Introducción al objeto matemático.

Entonces, el profesor le pide que halle la razón entre el valor en niskas y las palas de azafrán. Para ello, le sugiere que divida el valor de la columna izquierda entre el valor de la columna derecha en cada fila y halle el cociente:

David sigue este proceso, el cual se muestra a continuación:

$\frac{6}{2} = 3$	$\frac{12}{4} = 3$	$\frac{18}{6} = 3$
-------------------	--------------------	--------------------

El profesor le explica lo siguiente:

Una relación es llamada **directamente proporcional** si existe la igualdad de razones, esta igualdad se conoce como la **proporción**.

se puede hacer una **proporción**, de la siguiente manera:

	6	es a	2
Cómo	12	es a	4

En lenguaje matemático, lo anterior quiere decir que:

$$\frac{6}{12} = \frac{2}{4}$$

Fuente: Rey Gómez (2022).

TERCER MOMENTO

Para este momento se aborda la consulta que hizo Daniel sobre la medición de la Gran Pirámide de Egipto, hito que se le atribuye a Tales de Mileto. Allí, se muestra una historieta sobre la leyenda Figura 8.

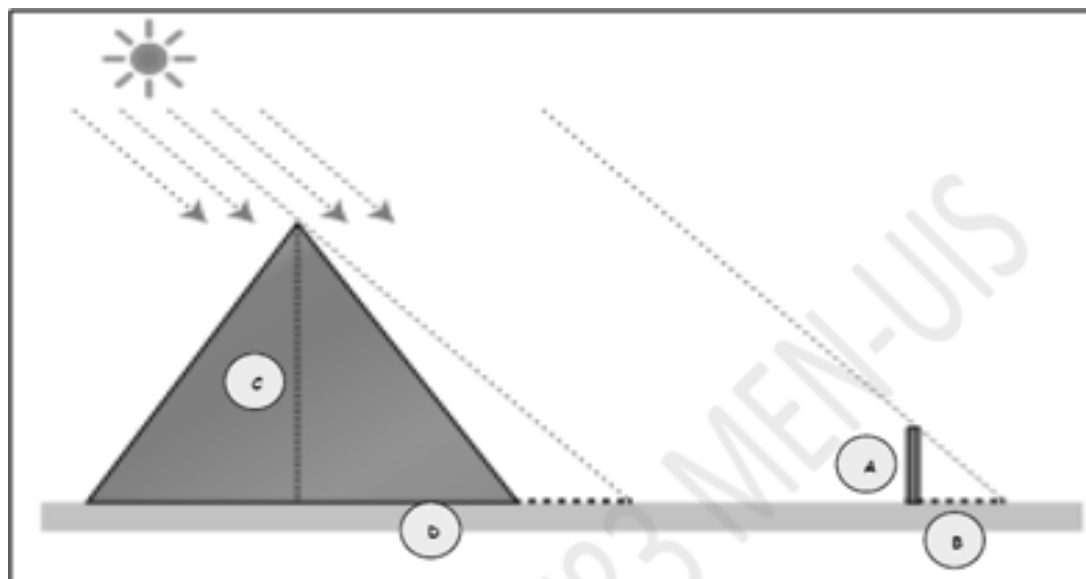
De manera posterior, se muestra un esquema que pudo haber utilizado Tales Figura 9, el cual es validado con el uso del SGD GeoGebra. Con esto se espera que el estudiante comprenda con mayor profundidad la idea de razón de cambio, a través de la comparación de las medidas inmersas en el esquema (altura del bastón, y longitud de la sombra), a estos, en un siguiente punto, se le asignan valores para que el estudiante determine la razón numérica. Se espera, que el estudiante

Figura 8 – Tales y la medición de la pirámide.



Fuente: Rey Gómez (2022).

Figura 9 – Esquema para la medición de la pirámide.

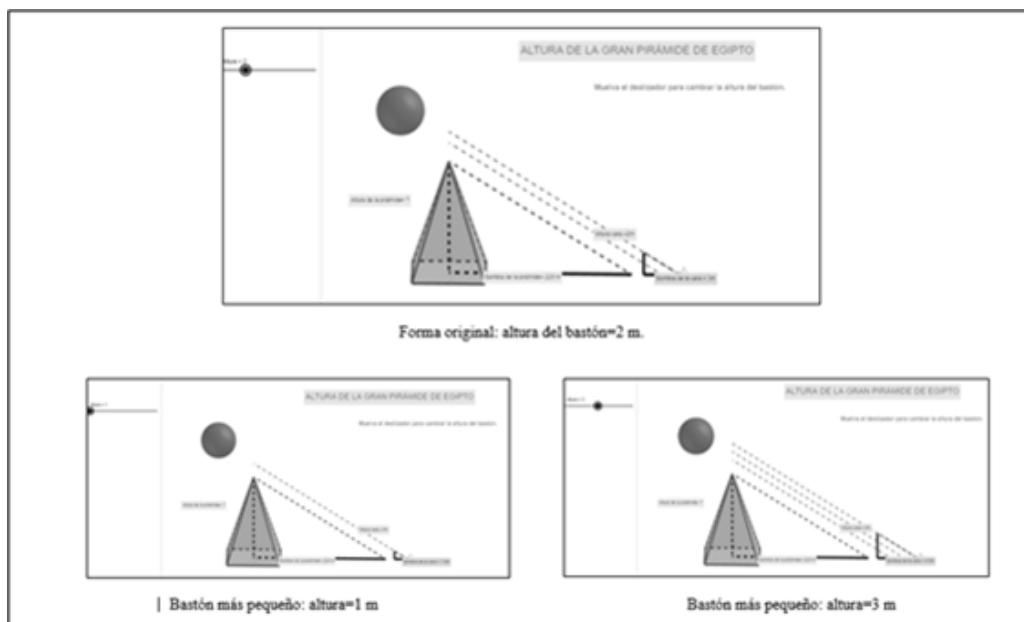


Fuente: Rey Gómez (2022).

pueda representar esta razón como fracción, en un número decimal, ya que es conveniente para responder a preguntas posteriores.

Seguidamente, se espera que el estudiante plantee una hipótesis sobre qué pasaría si Tales hubiese usado un bastón de mayor o menor longitud. Las hipótesis del estudiante podrán ser validadas o refutadas mediante un *applet* de GeoGebra Figura 10, en la cual el estudiante puede interactuar con la altura del bastón e identificar cómo cambia la sombra correspondiente. De este modo, se prevé que el estudiante reconozca de manera inicial la constancia de la razón entre la altura del bastón y la sombra que proyecta.

Figura 10 – Animación en GeoGebra-relación sombra-bastón.



Fuente: Rey Gómez (2022).

Luego de interactuar con el *applet*, el estudiante deberá corroborar o refutar sus conjeturas. Así mismo, con este *applet* se le pide al estudiante que halle las tres razones encontradas entre la altura del bastón y la sombra que proyecta, cuando cambia la altura del bastón, y transforme estas razones (expresadas como fracción) en números decimales, con el fin de que compruebe la igualdad de las razones, y así alcance el cuarto acercamiento denominado *constancia de la razón y algoritmia*. Posteriormente, el estudiante deberá responder algunas preguntas, pero ahora sobre la relación entre la altura de la pirámide y su sombra.

CUARTO MOMENTO

Para este momento se relata la consulta que hizo Jennifer sobre la medición de longitud de la tierra, que se le atribuye al matemático griego Eratóstenes. Para ello, se inicia con un vídeo que narra la historia. De esta manera, se le pide al estudiante que dibuje o explique con sus propias palabras la idea de Eratóstenes según el video, y luego la socialice. Seguidamente, se busca que el estudiante interactúe con una simulación en GeoGebra Figura 11 sobre el tema y determine si se trata de una relación directamente proporcional, y así pueda reconocer las magnitudes involucradas (ángulo solar y longitud de la tierra) y la forma en que varían.

Finalmente, se le pide al estudiante que visualice y comprenda el esquema que plantea Jennifer haciendo uso de una proporción Figura 12 para determinar la longitud de la circunferencia de la tierra, y luego desarrolle los pasos, proporcionados con anterioridad, para hallar la longitud buscada. Allí se le sugirió al profesor guiar muy minuciosamente las operaciones de los estudiantes y hacer énfasis en que entiendan el proceso realizado a la luz del acercamiento que se hizo hasta el momento al concepto de proporción.

Figura 11 – Animación en GeoGebra-medida de la longitud de la tierra por Eratóstenes.

Fuente: Rey Gómez (2022).

Figura 12 – Proceso para hallar la proporción.

Si	La longitud de la circunferencia de la tierra	es a	360°
Como	800 km	es	7°
Entonces, sabemos que:			
$\frac{\text{longitud de la circunferencia de la tierra}}{800 \text{ km}} = \frac{360^\circ}{7^\circ}$			

Fuente: Rey Gómez (2022).

LA RÚBRICA DE VALORACIÓN

Como ya se mencionó, el diseño didáctico se valoró de acuerdo con una rúbrica de evaluación establecida en el marco del trabajo de (Parada Rico, 2023). Esta valoración fue desarrollada mediante la figura de evaluación experta, por un encargado ajeno a la investigación, destinado para tal fin. En mayor medida se valoró la idoneidad didáctica del diseño, y la secuencia de actividades de acuerdo con los aspectos epistemológicos del objeto matemático de estudio, atendiendo a los niveles de profundidad descritos, y con un especial énfasis en los principios del DUA. Parte de la rúbrica diligenciada se puede ver en la Figura 13 y la Figura 14.

Mediante la rúbrica, se valoró positivamente los principios y pautas del DUA con un nivel de cumplimiento mayor al 90% como se puede observar en la Figura 15, lo que permitió validar el diseño didáctico para atender la inclusión, respondiendo así, favorablemente, al objetivo del trabajo.

Es importante aclarar que *a posteriori* teniendo como base los resultados de la rúbrica se hizo un refinamiento al diseño didáctico, el cual se reportó en (Rey Gómez, 2022). En una comunicación posterior se tiene previsto mostrar los resultados de la implementación del diseño para sopesarlos con los resultados arrojados por la rúbrica que se reporta en este artículo.

RESULTADOS: PRINCIPIOS RECTORES DEL DUA EN EL DISEÑO E IDONEIDAD DIDÁCTICA DE LA HISTORIA PARA PROMOVERLOS

Los resultados emergieron del análisis *a priori* en la construcción del diseño didáctico y su posterior valoración mediante una rúbrica. Estos resultados corresponden al proceso de planeación y valoración de acuerdo con el objetivo general. Así, con estas reflexiones se respondió a la pregunta

Figura 13 – Valoración general del diseño.

Indicador	P1				
	1	2	3	4	5
Las actividades propuestas responden a lo indicado en la tabla de propósitos y descriptores					X
Se observa el desarrollo del objeto matemático desde lo didáctico*					X
Las instrucciones, dentro del diseño, están acordes con el nivel de profundidad y el grupo de grados**					X

Fuente: Rey Gómez (2022).

Figura 14 – Valoración de la coherencia del diseño con el Diseño Universal de Aprendizaje.

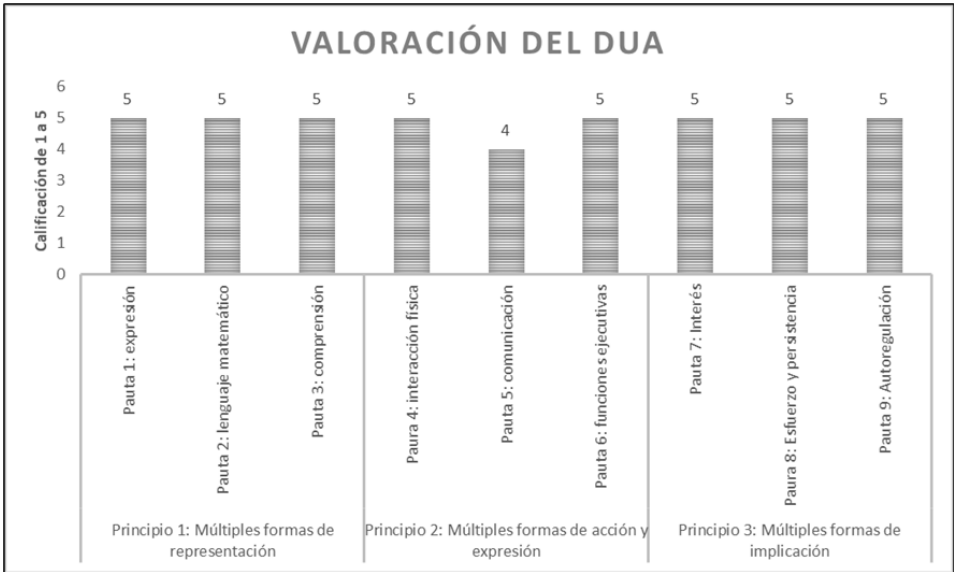
Indicador	P1				
	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona diferentes opciones para percepción.					X
Pauta 2. Proporciona múltiples opciones para el lenguaje, las expresiones matemáticas y simbólicas					X
Pauta 3. Proporciona opciones para la comprensión					X

Indicador	P1				
	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona opciones para la interacción física.					X
Pauta 2. Proporciona opciones para la expresión y la comunicación.				X	
Pauta 3. Proporciona opciones para las funciones ejecutivas.					X

Indicador	P1				
	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona opciones para captar el interés					X
Pauta 2. Proporciona opciones para mantener el esfuerzo y la persistencia.					X
Pauta 3. Proporciona opciones para la autorregulación.					X

Fuente: Rey Gómez (2022).

Figura 15 – Nivel de cumplimiento del diseño con el Diseño Universal de Aprendizaje.



Fuente: elaborado por los autores (2023).

de investigación, que cuestiona sobre: *¿Cómo la mirada histórica-epistemológica del razonamiento proporcional posibilita su estudio y favorece la inclusión en clase de Matemáticas?* Por tanto, a continuación, se discute la forma en que valoramos su potencia para la inclusión en clase de Matemáticas, con base en los tres principios rectores del DUA, en donde se integraron las formas en las que interviene la Historia de las Matemáticas para su enseñanza (Guacaneme, 2016).

MÚLTIPLES FORMAS DE REPRESENTACIÓN

La Historia como recurso didáctico posibilitó en gran medida el principio de representación. *La Historia como uso*, se puede evidenciar, por ejemplo, con dos elementos que se integraron en el diseño; estos son: los *¿sabías qué?* y *las notas históricas*. Estos elementos rescatan los aportes de la Historia para que el estudiante comprenda la situación y se sitúe en el contexto del problema, además posibilita opciones para la comprensión (pauta 3), en este caso de la proporción directa. Así mismo, se posibilita la conexión entre conceptos del razonamiento proporcional con hitos históricos que marcaron la historia de las razones y proporciones. Más específicamente, en este diseño se rescataron tres hitos históricos: El problema de *El Lilavati*, la leyenda de Tales sobre la medición de la Gran Pirámide de Egipto, y la medida de la longitud de la circunferencia de la Tierra, hecha por Eratóstenes.

Por otro lado, en el desarrollo del diseño se evidenció la *Historia de las Matemáticas como integración*, pues la Historia fue parte fundamental del diseño y no solo un extracto adicional. Con los registros históricos usados se complementa esta idea. Así, hacemos énfasis en que es la Historia misma la que conduce el desarrollo del tema, y permite anteponerse a los obstáculos epistemológicos que pudiesen surgir. Por ejemplo, en la medición de la pirámide, se empiezan a comparar por separado las razones entre la altura del bastón y la sombra del bastón, y de la altura de la pirámide con la sombra de la pirámide; y luego se pasa a construir el concepto de proporción, en donde se igualan estas dos razones. Esto permitió suministrar más formas para reconocer el lenguaje matemático inmerso en esa relación de comparación, favorecer la comprensión en el contexto y la obtención de nuevo conocimiento de manera sutil y estructurada, de acuerdo con la pauta 3 mencionada anteriormente.

Del mismo modo, se destacan las animaciones realizadas en el SGD GeoGebra, en donde el estudiante además de tener la posibilidad de interactuar, verificar y conjeturar sobre la situación que se le plantea, tiene opciones para la percepción. En vista de la necesidad de que el estudiante comprendiera, bajo una representación dinámica, la idea de variación, se planteó el uso de un SGD. Estas animaciones contribuyeron a favorecer la comprensión del objeto matemático mismo. Con esta misma idea, se propuso la visualización del video sobre Eratóstenes y la medida de la Tierra; dado que, usaba un lenguaje natural y adaptado a la edad de los estudiantes, permitiendo una forma distinta de expresión.

MÚLTIPLES FORMAS DE ACCIÓN Y EXPRESIÓN

El diseño didáctico buscó favorecer múltiples respuestas por parte de los estudiantes. Al respecto, se favorecieron espacios para que el estudiante expresara en una estructura sus esquemas en los registros que él considerara convenientes. Para ello, se realizaron preguntas abiertas, bien dirigidas, encaminadas al objetivo de cada actividad y dentro del contexto histórico del problema, de acuerdo con la *Historia de las Matemáticas como uso*.

En particular, se propusieron puntos donde el estudiante debía registrar de manera esquemática, verbal o gráfica, la situación. Por ejemplo, en el momento 4 con la historia de Eratóstenes se le solicitó al estudiante que, con base en el video, realizara un dibujo o explicara en sus palabras la idea; usando así la *Historia de las Matemáticas como integración*. Allí, se le pidió al docente dar mayor libertad para que el estudiante estructurara sus propios esquemas. De igual forma, con el uso de GeoGebra,

el estudiante logró verificar algunos datos y comportamientos de la situación para corroborar sus conjeturas. Esto de acuerdo con la pauta 4: *proporcionar múltiples medios físicos de acción*.

También en el diseño se le pide al docente buscar medios de expresión para comunicar las ideas, por ello se dan unas orientaciones sobre las *pistas* que sería pertinente dar para que el estudiante adquiriera el conocimiento. De igual forma, el uso de la tecnología, en particular del SGD, promueve distintas formas de comunicación. Además, se plantean en determinados espacios como los de socializar respuestas o esquemas contruidos individualmente, discutirlos y encontrar puntos de inflexión en estos. Con base en lo anteriormente mencionado, se da cumplimiento a la pauta 5: *proporcionar opciones para la comunicación y la expresión*.

Del mismo modo, para proporcionar opciones para las funciones ejecutivas (pauta 6) se realizó una secuencia adecuada de las actividades y se propusieron puntos de validación dentro del diseño, para que se valore el aprendizaje, especialmente por parte del propio estudiante (metacognición), dando como resultado el uso de la *Historia de las Matemáticas como permeador*. Como se mencionó, también se plantearon actividades, en donde el estudiante debía organizar las acciones de trabajo para llegar a la respuesta, lo que permitió gestionar las funciones ejecutivas del cerebro, y desarrollar estrategias para la resolución de problemas.

De esta manera, la *Historia de las Matemáticas como permeador* permitió orientar epistemológicamente la enseñanza y la actividad matemática del estudiante. La metacognición también es favorecida, en la medida en que la historia permite identificar y comprender los bloqueos epistemológicos en la construcción de conceptos, y superarlos, como lo afirma (Gutiérrez, 2019).

MÚLTIPLES FORMAS DE IMPLICACIÓN

El diseño que se presentó promueve la participación del estudiante en el aula de clase, dado que se piden incluir estrategias que motiven su interés. En ese sentido, cuando se planteó la situación que desarrolló el diseño en el momento 2, 3 y 4 tres estudiantes, con diferentes intereses se destacaron (Literatura, Historia, Arquitectura, Arte, Astronomía). Esto se planteó con el objetivo de abrir mayores posibilidades para que las actividades estuvieran dentro de los intereses particulares del estudiante, teniendo en cuenta la *Historia de las Matemáticas como uso* y en sintonía con la pauta 7: *proporcionar múltiples formas de captar el interés*. Esta pauta también fue propiciada por las simulaciones en GeoGebra, en la medida en que además de captar el interés del estudiante también estimularon la concentración.

Las actividades fueron diseñadas para que el estudiante cada vez descubriera, de manera autónoma, y respondieran a las preguntas realizadas. Por lo que, cada vez se requirió de mayor concentración, mayor actividad matemática y un nivel creciente de razonamiento y explicación de los conceptos matemáticos involucrados, con base en la *Historia de las Matemáticas como integración*. Por lo tanto, se hicieron algunas sugerencias al profesor sobre la orientación que se debe llevar a cabo según las características particulares del estudiante. Esto con relación a la pauta 8: *proporcionar opciones para mantener el esfuerzo y la persistencia*. Así mismo, la actividad matemática fue favorecida por el uso de la *Historia como permeador*, ya que como se mencionó anteriormente, delimitó el desarrollo del tema y los niveles de complejidad requeridos para la evolución histórica-epistemológica de los conceptos involucrados.

Por otro lado, la pauta 9: *proporcionar opciones para la auto regulación*, busca que el estudiante regule sus propias emociones como parte fundamental del aprendizaje y se mantenga motivado, fue favorecida especialmente por las tecnologías digitales: las animaciones en GeoGebra y el video, que suponen una forma diferente en que los estudiantes comprenden la información, realizan la actividad matemática, razonan, conjeturan y validan sus ideas intuitivas.

CONCLUSIONES

Este trabajo tuvo el desafío de proponer una alternativa didáctica, en este caso la Historia y la Epistemología, con el fin de promover la educación inclusiva en el aula de Matemáticas que satisfagan algunos principios fundamentales, propuestos en el DUA, y beneficie la comprensión en todos los estudiantes. Esto fue valorado *a priori* positivamente desde rúbrica que se realizó en el marco del presente trabajo. No obstante, el diseño está en proceso de implementación, por lo que los resultados se comunicarán posteriormente.

El diseño realizado, en general, cumplió con las condiciones necesarias para una educación inclusiva, y aquí, es necesario resaltar el potencial didáctico que tuvo la historia y la epistemología del concepto, para acercar la enseñanza de manera puntual a los principios del DUA. Si bien, este es un trabajo con un objeto matemático específico, muchas de las reflexiones pueden servir para orientar posteriores procesos de inclusión, y como se mostró, la Historia y la Epistemología es una buena alternativa para encaminar dichos procesos. Si bien, estos resultados son aún incipientes, es un imperativo de la educación proponer caminos para lograr la inclusión.

La Historia y la Epistemología de las Matemáticas son un recurso fundamental para favorecer el desarrollo de los procesos de enseñanza, y no tenerla presente produce una descontextualización en los objetos matemáticos. En consecuencia, los profesores en formación deben de recibir una formación teórica referente a estos aspectos para que puedan desarrollar un aprendizaje significativo en los estudiantes. Por lo tanto, de acuerdo con uno de los principios del DUA, se debe usar la Historia como herramienta para motivar y posibilitar el aprendizaje significativo.

Como panorama para trabajos posteriores, se insta al educador matemático que proponga y evalúe alternativas que favorezcan la educación inclusiva. Más específicamente, se le invita a considerar como guía para el desarrollo de la enseñanza o como mediadora a la historia y la epistemología. Aún más por la riqueza de la Historia de las Matemáticas, y por el mensaje de la historia en general, que ha mostrado que es entre todos, sin exclusión alguna, que es posible el continuo avance de la humanidad.

AGRADECIMIENTOS

Al Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación, Colombia – MINCIENCIAS quien está financiando el programa de investigación “Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro”. Código1115-852 70767, con el proyecto “Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnología: procesos de formación y reflexión con profesores”. Financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología”. Código70783, con recursos del Patrimonio autónomo Fondo Nacional de financiamiento para la ciencia, la tecnología y la innovación Francisco José de Caldas, contrato CT 183-2021.

REFERENCIAS

ALBA PASTOR, Carmen. Diseño Universal para el Aprendizaje un modelo para brindar oportunidades de aprender a todos los estudiantes. **Padres y Maestros**, Madrid, n. 374, p. 21-27, jun. 2018. <https://doi.org/10.14422/pym.i374.y2018.003>

ARNAIZ SÁNCHEZ, Pilar. Educar en y para la diversidad. In: SOTO, F.J.; LÓPEZ, J.A. (coords.). **Nuevas Tecnologías, viejas esperanzas**: las nuevas tecnologías en el ámbito de las necesidades especiales y la discapacidad. Murcia: Consejería de Educación y Universidades. p. 18-29.

BOOTH, Tony; AINSCOW, Mel. **Índice de inclusión**: Desarrollando el aprendizaje y la participación en las escuelas. París: CSIE, 2000.

D'AMORE, Bruno. **Didáctica de la Matemática**. Madrid: Editorial Magisterio, 2011.

DEPARTAMENTO ADMINISTRATIVO NACIONAL DE ESTADÍSTICA (DANE). **Nota Estadística**: Análisis de accesibilidad a centros educativos. Bogotá: DANE, 2022.

DÍAZ-BARRIGA, Frida; GONZÁLEZ, Ma. de Lourdes Luie; PACHECO PINZÓN, Diana; SAAD DAYÁN, Elisa; ROJAS-DRUMMOND, Silvia. **Metodología de diseño curricular para educación superior**. Ciudad de México: Editorial Trillas, 1990.

GONZÁLES, Pedro. La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. **SUMA**, Barcelona, n. 45, p. 17-28, oct. 2004.

GUACANEME, Edgar Alberto. **Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas**. 2016. 431f. Tesis (Doctorado en Educación Matemática) – Universidad del Valle, Cali, 2016.

GUTIÉRREZ, Jairo. **La Historia y la Epistemología en la Formación de un Ciudadano Matemáticamente Competente**: un Acercamiento Desde el Estudio de la Trigonometría. 2019. 182f. Tesis (Maestría en Educación Matemática) – Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2019.

GUZMÁN, Miguel. **Tendencias Innovadoras en Educación Matemática**. Madrid: Editorial Popular, 1993.

JÁCOME ANAYA, Ingrid; PARADA RICO, Sandra Evelyn. Enseñanza de las secuencias en grados 4° y 5° atendiendo la diversidad de estudiantes. In: INTER AMERICAN CONFERENCE ON MATHEMATICS EDUCATION, 16., 2023, Lima. **Anales** [...]. Lima. Disponible en: <https://xviponencias.ciaemiacme.org/index.php/xviciaem/xviciaem/paper/view/1449/141>. Acceso el: 20 mar. 2024.

KÖSTER, Anne. Educación asequible, accesible, aceptable y adaptable para los pueblos indígenas en México: Una revisión estadística. **Alteridad. Revista de Educación**, Cuenca, v. 1, n. 11, p. 33-52, 2016. <https://doi.org/10.17163/alt.v11n1.2016.03>

LASTRE, Karina; ANAYA Fanny; MARTÍNEZ, Luz E. Índices de inclusión en una institución pública de Colombia. **Revista Espacios**, Caracas, v. 40, n. 33, p. 16-22, jun-sep. 2019. ISSN: 0798-1015

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN). **Lineamientos curriculares de Matemáticas**. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia, 1998.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN). **Competencias TIC para el desarrollo profesional docente**. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia, 2013.

MOCHÓN COHEN, Simón. Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. **Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 24, n. 1, p. 133-157, abr.-may 2012.

OBANDO, Gilberto; VASCO, Carlos Eduardo; ARBOLEDA, Luis Carlos. Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 17, n. 1, p. 59-81, mar-may 2014. ISSN: 2007-6819

OLLER-MARCÉN, Antonio M.; GAIRÍN SALLÁN, José María. La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 16, n. 3, p. 317-338, may-jun. 2013. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1632>

ORGANIZACIÓN DE LAS NACIONES UNIDAS (ONU). **Declaración Universal de los Derechos Humanos**. New York: ONU, 1948.

PARADA RICO, Sandra Evely. Matemáticas al alcance de todos. In: **SIMPOSIO NORORIENTAL DE MATEMÁTICAS**, 12., 2023, Bucaramanga. Bucaramanga: Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, 2023.

REY GÓMEZ, Jaiver David. **Estudio del razonamiento proporcional en educación primaria: un acercamiento histórico-epistemológico para favorecer la inclusión**. 2022. 134f. Tesis (Licenciatura en Matemáticas) – Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2022.

VALVERDE SOTO, Ana Gabriela; CASTRO MARTÍNEZ, Encarnación. Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. **Investigación en Educación Matemática XIII**, Madrid, p. 523-531. 2009.

VELASCO MÉNDEZ, Angélica. **Profesores de matemáticas en ejercicio que reflexionan sobre la atención a la diversidad en clase de matemáticas**. 2022. 304f. Tesis (Maestría en Educación Matemática) – Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2022.

Cómo citar este artículo: REY GÓMEZ, Jaiver David; PARADA RICO, Sandra Evely. Enseñanza del razonamiento proporcional desde la historia y la epistemología: Una mirada inclusiva. Revista Brasileira de Educação, v. 30, e300096, 2025. <https://doi.org/10.1590/S1413-24782025300096>

Conflictos de interés: Los autores declaran que no existe ningún interés comercial o asociativo que represente un conflicto de intereses en relación con el manuscrito.

Financiamiento: El estudio no recibió financiación.

Contribuciones de los autores: Conceptualización, Curaduría de Datos, Análisis Formal, Investigación, Metodología, Administración del Proyecto, Recursos, Software, Supervisión, Validación, Visualización, Escritura – Redacción Inicial, Escritura – Revisión y Edición: Rey Gómez, J.D.; Parada Rico, S.E.

Declaración de disponibilidad de datos: Los datos de investigación están disponibles en el cuerpo del artículo.

SOBRE LOS AUTORES

JAIVER DAVID REY GÓMEZ, es Licenciado en Matemáticas, Matemático en formación, y Magíster en Educación Matemática por la Universidad Industrial de Santander. Profesor catedrático de la Universidad Industrial de Santander (Colombia).

SANDRA EVELY PARADA RICO es Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional CINVESTAV (México). Profesora titular de la Universidad Industrial de Santander (Colombia).

Recibido el 1 de agosto de 2023

Revisado el 10 de abril de 2024

Aprobado el 6 de agosto de 2024

Editora responsable: Terezinha Oliveira  <https://orcid.org/0000-0001-5349-1059>