Recebido: 12/02/2023 ■ Aprovado: 19/04/2023 ■ Publicado: 12/05/2023

eISSN 2179-426X
10.26843/rencima.v14n2a13

RENCIMA Revista de Ensino de Ciências e Matemática

O Quiz Interativo Digital na identificação de dificuldades de aprendizagem em conceitos nucleares do Cálculo I

Isabela Matias dos Anjos[1]

Eder Marinho Martins[2]

Frederico da Silva Reis[3]

Resumo: Este artigo apresenta uma pesquisa que objetivou identificar as dificuldades de aprendizagem em Cálculo I evidenciadas pelo Quiz Interativo Digital (QID). A metodologia de pesquisa qualitativa contemplou uma pesquisa com alunos de Licenciatura e de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto. O QID foi desenvolvido em um ambiente de programação visual e aplicado por meio dos celulares dos alunos em 3 etapas: Limites e Continuidade; Derivadas; Integrais. Os resultados apontam que uma grande parte das dificuldades podem ser associadas às dificuldades relacionadas a conteúdos da Educação Básica, especialmente, no caso de limites e continuidade. Outra parte bastante significativa das dificuldades recai sobre as aplicações matemáticas, especialmente, no caso de derivadas e integrais. Nas conclusões, ressaltamos a importância de um ensino de Cálculo I focado não somente na aplicação de regras, mas que também privilegie a interpretação, a representação e a aplicação dos conceitos nucleares do Cálculo I.

Palavras-chave: Ensino de Cálculo. Dificuldades de Aprendizagem. Quiz Interativo Digital.

The Digital Interactive Quiz in identifying learning difficulties in core concepts of Calculus I

Abstract: This article presents research that aimed identifying learning difficulties in Calculus I highlighted by the Digital Interactive Quiz (DIQ). The qualitative research methodology encompassed research with Mathematics undergraduate and graduate students from Universidade Federal de Ouro Preto. The DIQ was developed in a visual programming environment and applied in 3 steps through the students' cell phones: Limits and Continuity; Derivatives; Integrals. The results indicate that a great part of difficulties might be related to basic education subjects, especially regarding limits and continuity. Another substantial part of difficulties is in mathematical applications, especially regarding derivatives and integrals. In the conclusions, we highlight the importance of a Calculus I teaching focused not only in the application of rules, but also an teaching which benefits the interpretation, representation and application of core concepts of Calculus I.

Keywords*:* Calculus Teaching. Learning Difficulties. Digital Interactive Quiz.

El Quiz Interactivo Digital en la identificación de dificultades de aprendizaje en conceptos nucleares de Cálculo I

[1] Mestre em Educação Matemática. Professora da Escola Especial Irany Silva Salvador de Oliveira. Minas Gerais, Brasil. ✉ isabelamda12@hotmail.com https://orcid.org/0000-0003-1682-1025

[2] Doutor em Matemática. Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Minas Gerais, Brasil. ✉ eder@ufop.edu.br https://orcid.org/0000-0003-4710-9188.

[3] Doutor em Educação Matemática. Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Minas Gerais, Brasil. ✉ frederico.reis@ufop.edu.br https://orcid.org/0000-0001-6087-6483.

***Resumen*:** Este artículo presenta una investigación que tuvo como objetivo identificar las dificultades de aprendizaje en Cálculo I evidenciadas por el Quiz Interactivo Digital (QID). La metodología de investigación cualitativa incluyó una encuesta con estudiantes de Licenciatura y Bachillerato en Matemáticas de la Universidade Federal de Ouro Preto. El QID fue desarrollado en un ambiente de programación visual y aplicado a través de los celulares de los alumnos en 3 etapas: Límites y Continuidad; Derivadas; Integrales. Los resultados indican que gran parte de las dificultades pueden estar asociadas a dificultades relacionadas con los contenidos de la Educación Básica, especialmente en el caso de límites y continuidad. Otra parte muy significativa de las dificultades radica en las aplicaciones matemáticas, especialmente en el caso de derivadas e integrales. En las conclusiones, destacamos la importancia de la enseñanza de Cálculo I enfocada no solo en la aplicación de reglas, sino también en la interpretación, representación y aplicación de los conceptos nucleares de Cálculo I.

Palabras clave: Enseñanza de Cálculo. Dificultades de Aprendizaje. Quiz Interactivo Digital.

1 Introdução

A disciplina Cálculo Diferencial e Integral I ou, sucintamente, Cálculo I está presente em vários cursos do Ensino Superior, especialmente, nas Ciências Exatas e, particularmente, em licenciaturas e bacharelados de Matemática. Entendemos que o Cálculo I assume um papel crucial no Ensino Superior de Matemática, não somente por ser pré-requisito para a realização de disciplinas posteriores, como também por ter grande relevância para o conhecimento científico.

Por um lado, o ensino de Cálculo tem sido alvo de grandes discussões e debates. As dificuldades de aprendizagem evidenciadas pelos alunos e o alto número de reprovações têm causado inquietação em diversos pesquisadores e, assim, motivado a realização de diversas pesquisas em Educação Matemática no Ensino Superior (REIS, COMETTI e SANTOS, 2019; BICALHO e REIS, 2021).

Por outro lado, adentrando no cenário do Ensino Superior, é natural que as Tecnologias Digitais façam parte da vida cotidiana dos estudantes universitários pois, como ressaltam Souza e Pataro (2015), com a "carga de tecnologia" com a qual os alunos lidam, diariamente, e que evoluem de forma rápida e se tornam cada vez mais acessíveis, o acesso e democratização das tecnologias passaram a fazer parte da cultura da geração atual. Assim, é competência de os professores universitários incluírem as tecnologias no cenário educacional aproveitando, assim, ferramentas que podem contribuir para a aprendizagem, de forma interativa e eficaz.

Particularmente, sobre as Tecnologias Digitais nos processos de ensino e de

REnCiMa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 1-26, abr./jun. 2023

aprendizagem de Cálculo, já no final do século passado, Palis (1995) enfatizava que

> tem-se constatado que algumas mudanças na qualidade do aprendizado dos alunos ocorrem simplesmente porque eles participam mais ativamente em aulas ou trabalhos apoiados em computadores e/ou calculadoras, seguem o curso mais de perto e fazem mais perguntas, do que em ambientes de ensino tradicionais (p. 25).

Diante dessas questões e possibilidades, nesse artigo[4], apresentamos uma pesquisa que objetivou identificar as principais dificuldades de aprendizagem em conceitos que consideramos nucleares no ensino de Cálculo I (limites e continuidade, derivadas e integrais) evidenciadas pela performance de alunos de Licenciatura e de Bacharelado em Matemática nas diversas etapas do Quiz Interativo Digital, que desenvolvemos em um ambiente de programação visual chamado *Mit App Inventor* e aplicamos por meio dos celulares dos alunos, como detalharemos e contextualizaremos, após uma referenciação teórica realizada nas seções a seguir.

2 Algumas pesquisas sobre as dificuldades de aprendizagem em Cálculo

Tendo em vista as diversas problemáticas do ensino e da aprendizagem de Cálculo I, pesquisadores buscam pontuar as dificuldades apresentadas pelos alunos e, sob certa medida, anunciar diversas propostas pedagógicas na tentativa de contribuir para a solução dessas dificuldades.

Abreu e Reis (2011) afirmam que não existem culpados pelas falhas nos processos de aprendizagem do Cálculo I, mas a responsabilidade de mudar esse quadro é, de fato, de todos que, de alguma forma, estão envolvidos nesses processos de ensino e de aprendizagem. Os autores apontam como justificativas recorrentes a abordagem didática tradicional de alguns professores, especialmente, no ensino de limites e continuidade, e também a preparação inadequada dos alunos no Ensino Médio. Segundo os pesquisadores, um exemplo dessa junção de fatores ocorre na definição de continuidade em um ponto, na qual a articulação de conceitos prévios relacionados a funções e limites sempre causa dificuldades de aprendizagem, especialmente, relacionadas às condições para a continuidade impostas na definição, quase sempre apresentada pelos professores de "maneira axiomaticamente formal".

Por sua vez, Rezende (2003) afirma que as dificuldades na aprendizagem de

[4] Esse artigo é recorte de uma dissertação de mestrado defendida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), escrita pela primeira autora, orientada pelo segundo autor e coorientada pelo terceiro autor.

REnCiMa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 1-26, abr./jun. 2023

Cálculo são de natureza epistemológica, requerendo dos alunos uma preparação anterior ao início dos estudos:

> As dificuldades de aprendizagem no ensino de Cálculo têm sido estudadas através de projeções de natureza psicológica do problema de aprendizagem de um ou mais conceitos específicos do Cálculo. A fonte de nossas ações de mapear é bem outra: a epistemologia. Nessa perspectiva, o aluno não aprende não é porque não possui "estruturas cognitivas" apropriadas ao desenvolvimento de determinados conceitos, mas, isto sim, porque ainda não construiu os nós e os feixes de relações de conhecimentos necessários para se estabelecer novas conexões e a incorporação de novos nós à rede já construída (REZENDE, 2003, p. 56, grifo do autor).

Segundo o pesquisador, o "fracasso" no ensino de Cálculo tem início quando começa a se ensinar a disciplina. Ele sugere que um trabalho no Ensino Médio sobre a variabilidade de funções pode facilitar a aprendizagem de Cálculo no Ensino Superior. Porém, a realidade é que a grande maioria dos alunos nunca teve contato com as ideias de Cálculo ou algo parecido. Rezende (2003) deixa claro que o primeiro passo para resolver os problemas do ensino de Cálculo no Ensino Superior é fazer emergir do "esconderijo forçado" o conhecimento de Cálculo que se encontra na Educação Básica.

Outros autores também justificam que as dificuldades na aprendizagem do Cálculo são de natureza epistemológica, sendo que esses obstáculos epistemológicos foram estudados inicialmente por Bachelard e explorados por vários matemáticos, incluindo Brousseau. Nasser (2009) destaca que

> Brousseau distingue três tipos de obstáculos à aprendizagem: os de origem *ontogênica*, que se referem a limitações do próprio sujeito, os de natureza *didática,* que dependem das experiências de aprendizagem vivenciadas; e os de ordem *epistemológica*, inerentes ao conhecimento (p. 44, grifos da autora).

Esses obstáculos dificultam a aprendizagem, pois o aluno cria uma resistência à construção e compreensão de novos saberes. Assim, uma das justificativas para os altos níveis de reprovação na disciplina poderia ser a quantidade de entraves de que os alunos enfrentam no decorrer da disciplina Cálculo I.

Também Nasser, Sousa e Torraca (2015) apresentam preocupações em relação às dificuldades na aprendizagem dos conceitos do Cálculo I e chegaram à conclusão de que a maioria dos erros cometidos pelos alunos se deve às lacunas na aprendizagem de Matemática da Educação Básica. Os autores apresentam alguns exemplos de erros e equívocos comuns de alunos relacionados a obstáculos à

REnCiMa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 1-26, abr./jun. 2023

aprendizagem de Cálculo, que podem ser sintetizados nos seguintes tópicos:

- A concepção ingênua de que "o gráfico de uma função não precisa ser exato". Essa concepção explica alguns dos problemas observados nas tentativas de alunos de Cálculo I ao traçar gráficos de funções simples;
- A concepção de que "apenas relações representáveis por fórmulas analíticas são dignas de serem chamadas funções";
- A crença de que o gráfico de uma função é obtido marcando alguns pontos no plano cartesiano e unindo-os por segmentos de reta, deixando de considerar a lei de formação da função;
- As dificuldades na transposição da representação verbal para uma representação analítica, isto é, escrever uma sentença matemática que relacione as grandezas envolvidas no problema;
- Dificuldades na transposição da representação verbal para uma representação gráfica;
- Dificuldades em questões de máximos e mínimos (NASSER, SOUSA e TORRACA, 2015, p. 9, grifos dos autores).

Tais tópicos coadunam com a visão de Nasser (2007), ao afirmar que pesquisas apontam que as principais dificuldades dos alunos na aprendizagem de Cálculo I estão na compreensão das noções de função, limites e derivadas, no domínio do Teorema Fundamental do Cálculo ou na forma como os alunos estudam.

Nesse contexto, como também destacou a pesquisa de Rocha (2016), o conceito de função é crucial para a aprendizagem dos conceitos nucleares do Cálculo I, sendo importante destacar que a estrutura curricular de alguns cursos implementa o estudo aprofundado de funções, antecedendo ao estudo de limites, derivadas e integrais. Já outros cursos trazem uma disciplina de "Pré-Cálculo" dedicada exclusivamente ao estudo de funções e limites. Assumindo, então, a importância do conceito de função, Souza e Andrade (2016) apontam que os alunos

> quando ingressam no ensino superior na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, em sua maioria, possuem carências de conteúdos básicos de funções que são requisitos necessários para se introduzir o conceito de limites. Além do conhecimento anterior sobre funções, mais especificamente se faz necessário o conhecimento referente à interpretação de gráficos. Pode-se destacar a carência de conhecimento apresentado nas resoluções sobre as propriedades das funções, em que, conhecimentos sobre variáveis dependentes e independentes, domínio e imagem, são imprescindíveis para construção e análise do estudo de limites (p. 6).

Nessa perspectiva, Nasser, Sousa e Torraca (2015) afirmam que o tópico de funções é abordado no Ensino Médio de modo pontual, não estimulando uma visão abrangente necessária para o Ensino Superior. Isso compromete a aprendizagem

REnCiMa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 1-26, abr./jun. 2023

posterior, pois o estudo de limites, derivadas e integrais depende de vários conteúdos estudados em etapas anteriores.

Já sobre o aspecto da resolução de problemas típicos do Cálculo, Nasser *et al.* (2019) concordam que

> a maioria dos problemas do Cálculo depende de uma representação visual adequada, como os problemas típicos de “máximos e mínimos”, “taxas relacionadas” e de “área entre curvas”. Em geral, a dificuldade dos alunos nesses problemas não é na aplicação do conceito de derivada ou de integral, mas na sua representação geométrica e na identificação de relações entre os elementos da figura (p. 10, grifos dos autores).

Dentre outros estudos realizados para investigar as dificuldades que os alunos possuem na aprendizagem de conceitos do Cálculo, cabe detalhar de forma mais sistemática a pesquisa de Cury e Cassol (2004), que teve como objetivo detectar e classificar os erros cometidos em Cálculo A (disciplina que possuía uma ementa bem parecida com a tradicional ementa de Cálculo I porém, incluía métodos de integração, sequências e séries), propondo, como conclusão, mudanças necessárias para que os alunos venham a buscar soluções para as suas próprias dificuldades, o que reforça a importância de uma avaliação diagnóstica conjunta com os professores.

Com base em pesquisas anteriores realizadas por elas próprias, as pesquisadoras destacaram que, a cada semestre que se passava, aumentavam as dificuldades dos alunos em Cálculo, principalmente, em Matemática da Educação Básica, resolução de problemas e capacidade de argumentação.

Para realizar a análise de erros foram aplicadas 3 provas com questões escolhidas de forma estratégica. Na primeira prova, foram apresentadas 2 funções definidas por várias sentenças, sendo requisitada a construção de seus gráficos. A partir das resoluções das atividades, as pesquisadoras identificaram erros e dificuldades tais como: desconhecimento de funções exponenciais, erros de cálculo sobre os valores estimados, erros no conceito de função, erros ao traçar a função linear e desconhecimento do gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$.

Na segunda prova, foram apresentadas questões envolvendo limites e derivadas. Os erros e dificuldades identificados foram: a aplicação incorreta da regra de L’Hospital, pois o limite não permitia a aplicação da regra, erros de álgebra relacionados a conteúdos do Ensino Médio (do tipo simplificação de x^2 no numerador com x no denominador), erros no conceito de limites (do tipo não compreensão do

REnCiMa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 1-26, abr./jun. 2023

sinal “+” indicando um limite lateral), erros de cálculos nas substituições ou lapsos de escrita (do tipo “esquecimento” da expressão “lim” no encadeamento das igualdades) e erros de aplicação de regras de derivação (do tipo erro de sinais).

Já na terceira prova, foram abordadas questões sobre integrais. Foram identificados erros e dificuldades: no método de integração (do tipo utilização de métodos que não permitiam a correta resolução da integral), na técnica de integração por partes, na não identificação da variável de integração, nos procedimentos e processos algébricos, além de erros por falsa generalização (do tipo o não reconhecimento da função composta $f(x) = e^{3x}$).

Tendo em vista todos os erros percebidos e analisados, Cury e Cassol (2004, p. 34) julgam ser primordial “repensar o ensino de Cálculo, empregando metodologias e recursos variados”, sendo necessário encontrar formas de “desafiar os estudantes, propondo atividades motivadoras, que lhes despertem o interesse pelo estudo, pela realização das tarefas propostas, pelo monitoramento de sua própria cognição”.

Em suas considerações, as pesquisadoras enfatizam, também, a importância dos *feedbacks* para os alunos, para que eles possam entender os próprios erros e, com isso, suas principais dificuldades, o que lhes oportuniza refletir sobre sua aprendizagem e traçar suas devidas estratégias de estudo.

Essa ênfase na importância do entendimento dos seus próprios erros por parte dos alunos coaduna com foco da pesquisa de Homa (2018), que abordou o ensino de derivadas, porém, utilizando as tecnologias no ensino como ferramenta principal para a realização de uma avaliação diagnóstica. Como conclusão, o autor apontou a identificação de dificuldades matemáticas associadas às habilidades e competências gerais necessárias à resolução de problemas com derivadas.

Cabe, ainda, destacar que diversas propostas de mudanças no ensino têm sido apresentadas por pesquisadores que têm investigado os desafios no ensino de Cálculo I. Particularmente, devido ao foco de nossa pesquisa, passaremos, agora, a apresentar algumas pesquisas que apontam contribuições das Tecnologias Digitais para a aprendizagem dos conceitos do Cálculo I.

3 Algumas perspectivas sobre as Tecnologias Digitais no ensino de Cálculo

A utilização de Tecnologias Digitais pode se constituir em uma forma de dinamização do ensino e uma motivação para a aprendizagem (REIS, ESTEVES,

REnCiMa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 1-26, abr./jun. 2023

2020). Como a Matemática, especialmente, no Ensino Superior, possui conceitos considerados abstratos e de difícil entendimento para os alunos, com o auxílio das tecnologias é possível pensar em uma aula que vá além do que o quadro e o giz permitem. Entretanto, para Masini e Moreira (2008), o quadro e o giz não devem ser, simplesmente, substituídos por outras ferramentas tecnológicas e, no que se refere às tecnologias no ensino de Matemática, eles enfatizam a importância de se mesclar o uso de Tecnologias Digitais com outras tecnologias como quadro, giz, papel e lápis.

Particularmente, um dos principais fatores que corroboram o uso de tecnologias na sala de aula de Cálculo é a possibilidade de se trabalhar com a visualização dos alunos, proporcionando um *feedback* mais rápido e possibilitando a manipulação e representação de conceitos matemáticos de forma simples e rápida. Segundo Richit (2010), ao utilizarmos as Tecnologias Digitais no contexto do Cálculo

> o foco dos processos de ensino e aprendizagem não está somente nos procedimentos utilizados para solucionar determinado problema, mas, também, na aprendizagem visto que a utilização dos recursos das tecnologias digitais pode conduzir os estudantes a modos diferentes de pensar e produzir conhecimentos. Esses conhecimentos podem ser favoráveis à compreensão destes e envolvem aspectos como a visualização, a simulação, o aprofundamento do pensamento matemático, conjecturas e validações por parte dos alunos, entre outros (p. 30).

Outra contribuição muito relevante para a discussão sobre as tecnologias no ensino de Cálculo vem da pesquisa de Marin e Penteado (2011), que teve como objetivo central compreender como os professores do Ensino Superior estão usando as chamadas TIC (Tecnologias de Informação e Comunicação) quando ministram suas aulas de Cálculo.

As análises foram feitas a partir de entrevistas com 13 professores de Cálculo, quando procurou-se conhecer de cada um deles: o tipo de TIC que ele utiliza; o que o levou a optar por fazer uso de TIC para ensinar Cálculo; a formação que ele teve para fazer isso; os livros didáticos que utiliza; que conteúdos da disciplina de Cálculo são trabalhados com o uso de TIC; que atividades são propostas para os alunos; como é feita a avaliação da aprendizagem; e que vantagens e desvantagens vê no uso de TIC no ensino de Cálculo.

Os pesquisadores deixam claro que não defendem que os professores utilizem TIC “o tempo todo” e, mesmo que as utilize, é importante lembrar que certas situações desse uso podem ser consideradas como inovadoras, mas outras, como tradicionais

(MARIN e PENTEADO, 2011).

Os dados da pesquisa de Marin e Penteado (2011) também mostram que os professores usam TIC no estudo de conteúdos que seriam de abordagem “quase impossível” sem tecnologias. Eles ainda citam alguns conteúdos na abordagem dos quais são usadas as tecnologias com maior frequência: funções, coeficiente angular, reta tangente, limites, derivadas, máximos e mínimos de funções, estudo da concavidade, integração, sequências, séries, séries de Taylor, superfícies e equações diferenciais.

Em relação às demonstrações matemáticas abordadas nos conteúdos citados anteriormente, os pesquisadores deixaram claro que, com o uso das tecnologias não conseguem fazer demonstrações e sim “mostrações”, para que o aluno apenas se convença da validade de um teorema. Dessa forma, a literatura também afirma que não é fácil combinar tecnologias com demonstrações e que a maioria dos professores preferem utilizar o quadro e o giz para demonstrar (MARIN e PENTEADO, 2011).

À guisa de conclusão, Marin e Penteado (2011) apontam para uma grande relevância no uso das tecnologias no ensino de Cálculo, coadunando com o que Palis (1995) já firmava sobre as relações entre tecnologias e aprendizagem de Cálculo.

Partindo, então, de tais perspectivas acerca das contribuições das Tecnologias Digitais para o ensino de Cálculo, passamos, agora, a contextualizar nossa pesquisa.

4 Apresentando a pesquisa em seu contexto

Nossa pesquisa foi realizada com os alunos dos cursos de Licenciatura e de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), matriculados na disciplina MTM 122 – Cálculo Diferencial e Integral I, no 1º semestre de 2022.

Essa disciplina é obrigatória para os cursos de Licenciatura e de Bacharelado em Matemática, tem uma carga horária total de 90 horas, e foi lecionada por um professor, efetivo do Departamento de Matemática da UFOP, com formação acadêmica incluindo Mestrado e Doutorado em Matemática, e com cerca de 10 anos de experiência docente no Ensino Superior.

A ementa da disciplina abordou os seguintes conteúdos: Números Reais; Funções; Limites e Continuidade; Derivadas e Aplicações; Integrais. As principais referências bibliográficas adotadas para a disciplina foram: GUIDORIZZI, H. L. Um Curso de Cálculo – v. 1; LEITHOLD, L. O Cálculo com Geometria Analítica – v. 1; SIMMONS, G. F. Cálculo com Geometria Analítica – v. 1.

Inicialmente, havia 38 alunos matriculados, porém, no decorrer do semestre, ocorreram trancamentos e, no total, 13 alunos desistiram de finalizar a disciplina. Ao final do semestre, a turma contava com 25 alunos matriculados (mas nem todos frequentaram até o final).

As aulas foram ministradas exclusivamente pelo professor da disciplina, sob a forma de aulas expositivas e de resolução de exercícios, em 3 dias por semana, com 2 aulas por dia, no turno da noite (uma vez que os cursos de Licenciatura e de Bacharelado em Matemática são noturnos), tendo cada aula a duração de 50 minutos, ou seja, as aulas duravam 1 hora e 40 minutos em cada um dos 3 dias da semana, ao longo do semestre letivo.

O Quiz Interativo Digital (QID), que será melhor detalhado a seguir, foi aplicado em 3 etapas: Etapa I) QID de Limites e Continuidade; Etapa II) QID de Derivadas; Etapa III) QID de Integrais.

Inicialmente, a proposta foi apresentada para o professor da turma pelo orientador da pesquisa e pela pesquisadora. Foi combinado que seriam necessários 3 dias de aulas (ou seja, 1 hora e 40 minutos de aula por dia) para a aplicação das etapas do QID, sendo uma etapa em cada um desses dias. Após sua concordância e com a manifestação de uma grande expectativa, o professor comunicou à turma sobre a realização da pesquisa e, mesmo ressaltando que a participação dos alunos seria totalmente voluntária, informou que ele concederia uma pontuação adicional para aqueles que participassem, respondendo às questões do QID, pontuação essa que foi somada com a nota de cada uma das 3 provas previstas, proporcionalmente à pontuação obtida em cada uma das 3 etapas do QID.

Em conjunto com o professor, decidimos aplicar cada etapa ao final dos conteúdos ministrados. Assim, as etapas do QID foram aplicadas uma aula antes de cada prova, substituindo, de certa forma, a tradicional “aula de revisão” que normalmente precede às provas.

5 Apresentando o desenvolvimento e a lógica de elaboração do QID

Para o desenvolvimento do QID, utilizamos um ambiente de programação

REnCiMa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 1-26, abr./jun. 2023

visual bastante intuitivo chamado *Mit App Inventor*, também conhecido como *App Inventor for Android*, que é uma aplicação de código aberto originalmente criada pela *Google* e, atualmente, mantida pelo *Massachusetts Institute of Technology* (MIT). O *Mit App Inventor* está disponível gratuitamente na internet para que qualquer usuário construa aplicativos e disponibilizem em *smartphones* com sistemas operacionais do tipo *Android*, coincidentemente, o tipo de celular de praticamente todos os alunos participantes de nossa pesquisa.

No planejamento do funcionamento do QID, procuramos considerar alguns elementos da gameficação (ou gamificação, para alguns autores), metodologia ativa que, segundo Groh (2012), pode compartilhar dos elementos e do *design* dos jogos para atingir propósitos educacionais, dentre os quais consideramos "lançar desafios, usar estratégias e obter pontos para atingir objetivos". Ainda, segundo Fardo (2013), um dos elementos importantes pressupostos na gameficação que precisa ser considerado em uma atividade de ensino gameficada é a existência de um "sistema de *feedback*". Incorporamos tais elementos ao QID quando, após a opção por uma das respostas disponíveis em cada questão, os alunos recebiam automaticamente uma mensagem de erro ou acerto, além das pontuações parciais e final.

Como descrevemos anteriormente, foram realizadas 3 etapas do QID com os alunos de Licenciatura e de Bacharelado em Matemática matriculados na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I. Tendo sempre em vista nosso objetivo de identificar as principais dificuldades dos alunos na aprendizagem de conceitos nucleares do Cálculo I, a partir de sua performance na resolução das questões do QID e, dentro do contexto de ensino, no qual cada etapa seria aplicada ao final dos conteúdos ministrados, em uma aula antes de cada prova, desempenhando um papel de "revisão" dos principais conteúdos que, geralmente, são abordados nas provas, seguimos a seguinte "lógica de elaboração" das etapas do QID:

- Cada etapa possuiu 10 questões no total, sendo 9 questões mais uma questão sob a forma de "desafio", por abordar um conteúdo tradicionalmente considerado pelos alunos bastante específico e "bem mais difícil" do que as demais questões;
- As 9 questões foram distribuídas por níveis de dificuldade agrupadas em 3 fases, sendo cada fase composta por 3 questões;
- A Fase 1 (Nível Fácil) foi composta pelas Questões 1, 2 e 3, a Fase 2 (Nível

REnCiMa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 1-26, abr./jun. 2023

Médio) foi composta pelas Questões 4, 5 e 6, e a Fase 3 (Nível Difícil) foi composta pelas Questões 7, 8 e 9;

- Para a elaboração das questões, foram considerados 3 “eixos de dificuldades” que, em certo sentido, buscaram agrupar as dificuldades de aprendizagem que, tradicionalmente, são manifestadas pelos alunos, em Cálculo I, como detalhamos a seguir;
- Para uma melhor distribuição das questões dentro dos níveis de dificuldade e dos eixos de dificuldades, cada fase conteve uma questão de cada um dos 3 eixos, em cada uma das etapas do QID;
- Dessa forma, as Questões 1, 4 e 7 foram elaboradas na perspectiva de evidenciar dificuldades associadas ao 1º eixo, as Questões 2, 5 e 8 foram elaboradas na perspectiva de evidenciar dificuldades associadas ao 2º eixo e as Questões 3, 6 e 9 foram elaboradas na perspectiva de evidenciar dificuldades associadas ao 3º eixo.

Cabe destacar que os níveis e os eixos de dificuldades de aprendizagem que apresentaremos, a seguir, foram elaborados a partir da experiência discente da pesquisadora e da experiência docente de seus orientadores, entretanto, não intentamos, de forma alguma, exaurir ou restringir todas as dificuldades de aprendizagem manifestadas pelos alunos de Cálculo I aos eixos aqui considerados, até mesmo pelo fato de que as experiências com o ensino e a aprendizagem de Cálculo I são tão ricas e individualizadas que, certamente, diferentes atores do seu cenário educacional poderiam elaborar diferentes níveis e eixos de dificuldades, a partir de suas vivências e concepções.

Dentro dessa perspectiva, ao elaborarmos as questões para a Etapa I) QID de Limites e Continuidade, consideramos os seguintes eixos de dificuldades de aprendizagem:

Quadro 1: Questões por Fases e Eixos de Dificuldades da Etapa I do QID

Fase 1	Fase 2	Fase 3	Eixos de Dificuldades de Aprendizagem
1	4	7	Propriedades operatórias de limites
2	5	8	Limites laterais
3	6	9	Funções contínuas

Fonte: Dados da Pesquisa

No 1º eixo, buscamos agrupar eventuais dificuldades na aprendizagem de

REnCiMa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 1-26, abr./jun. 2023

propriedades operatórias de limites relacionadas a: substituição direta para o cálculo de limites, manipulações algébricas quando há indeterminações na substituição direta, propriedades operatórias no cálculo de limites, dentre outros conteúdos correlatos.

No 2º eixo, buscamos agrupar eventuais dificuldades na aprendizagem de limites laterais relacionadas a: condições para a existência de um limite, análise da existência de limites laterais por meio de gráficos, limites laterais de uma função definida por partes, dentre outros conteúdos correlatos.

No 3º eixo, buscamos agrupar eventuais dificuldades na aprendizagem de funções contínuas relacionadas a: condições de continuidade envolvendo limites, casos de descontinuidade, análise da continuidade por meio de gráficos, dentre outros conteúdos correlatos.

Já ao elaborarmos as questões para a Etapa II) QID de Derivadas, consideramos os seguintes eixos de dificuldades de aprendizagem:

Quadro 2: Questões por Fases e Eixos de Dificuldades da Etapa II do QID

Fase 1	Fase 2	Fase 3	Eixos de Dificuldades de Aprendizagem
1	4	7	Regras de derivação
2	5	8	Interpretação gráfica de derivadas
3	6	9	Aplicações de derivadas

Fonte: Dados da Pesquisa

No 1º eixo, buscamos agrupar eventuais dificuldades na aprendizagem de regras de derivação relacionadas a: aplicação da regra do produto, aplicação da regra do quociente, aplicação da regra da cadeia em conjunto com outras regras de derivação, dentre outros conteúdos correlatos.

No 2º eixo, buscamos agrupar eventuais dificuldades na aprendizagem de interpretação gráfica de derivadas relacionadas a: inclinação da reta tangente, sinal da derivada, verificação da diferenciabilidade de uma função por meio de gráficos, dentre outros conteúdos correlatos.

No 3º eixo, buscamos agrupar eventuais dificuldades na aprendizagem de aplicações de derivadas relacionadas a: problemas envolvendo velocidade e aceleração, máximos e mínimos de uma função, problemas envolvendo taxas de variação, dentre outros conteúdos correlatos.

Por fim, ao elaborarmos as questões para a Etapa III) QID de Integrais, consideramos os seguintes eixos de dificuldades de aprendizagem:

REnCiMa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 1-26, abr./jun. 2023

Quadro 3: Questões por Fases e Eixos de Dificuldades da Etapa III do QID

Fase 1	Fase 2	Fase 3	Eixos de Dificuldades de Aprendizagem
1	4	7	Integrais imediatas
2	5	8	Aplicações de integrais a áreas
3	6	9	Métodos de integração

Fonte: Dados da Pesquisa

No 1º eixo, buscamos agrupar eventuais dificuldades na aprendizagem de integrais imediatas relacionadas a: integrais imediatas de funções polinomiais, integrais imediatas de funções exponenciais, integrais imediatas de funções logarítmicas, dentre outros conteúdos correlatos.

No 2º eixo, buscamos agrupar eventuais dificuldades na aprendizagem de aplicações de integrais a áreas relacionadas a: áreas de regiões delimitadas por gráficos de duas funções, áreas delimitadas por gráficos de funções polinomiais, áreas delimitadas por gráficos de funções trigonométricas, dentre outros conteúdos correlatos.

No 3º eixo, buscamos agrupar eventuais dificuldades na aprendizagem de métodos de integração relacionadas a: método da substituição de variáveis, método da integração por partes, composição e iteração de métodos de integração, dentre outros conteúdos correlatos.

6 Apresentando e analisando os resultados obtidos

Apresentamos, de forma sucinta, uma análise das dificuldades de aprendizagem dos alunos a partir dos erros cometidos nas 3 questões de cada um dos 3 eixos de dificuldades, em cada uma das etapas do QID. Uma apresentação mais completa e detalhada dos resultados pode ser encontrada em Anjos (2023).

Ressaltamos que, devido à natureza das questões apresentadas sob a forma de “desafio”, não as consideramos na análise da performance dos alunos, nas diversas etapas do QID, entendendo que, para tal análise, seria apropriada a utilização de métodos e testes estatísticos mais elaborados, como por exemplo, a Teoria de Resposta ao Item (TRI), o que não foi previsto no escopo metodológico de nossa pesquisa.

6.1 Identificando as dificuldades de aprendizagem em Limites e Continuidade

Ressaltamos que 21 alunos participaram da aplicação da Etapa I) QID de

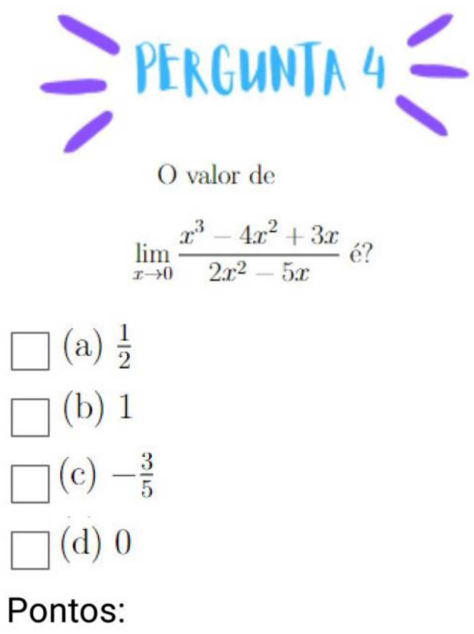
REnCiMa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 1-26, abr./jun. 2023

Limites e Continuidade. O número médio de erros cometidos por esses alunos nas 9 questões dos 3 eixos de dificuldades foi 4,3 (isto é, os 21 alunos erraram, em média, 4,3 das 9 questões). Na perspectiva de evidenciar dificuldades associadas ao 1º eixo sobre propriedades operatórias de limites, apresentamos a questão com o maior número de erros (14 dos 21 alunos) — Figura 1.

A performance dos alunos evidenciou que suas principais dificuldades na aprendizagem de propriedades operatórias de limites ocorreram nas manipulações algébricas quando há indeterminações na substituição direta e na aplicação de propriedades operatórias no cálculo de limites. Podemos associar tal evidência, muito provavelmente, a dificuldades relacionadas a conteúdos da Educação Básica, como pontuaram Rezende (2003) e Abreu e Reis (2011). Por outro lado, as dificuldades com as propriedades operatórias no cálculo de limites eram, de certa forma, esperadas, como já havia sido apontado por Nasser (2007).

Já na perspectiva de evidenciar dificuldades associadas ao 2º eixo sobre limites laterais, apresentamos a questão com o maior número de erros (15 dos 21 alunos) — Figura 2.

Figura 1: Questão 4 (Nível Médio) do 1º eixo da Etapa I


PERGUNTA 4

O valor de

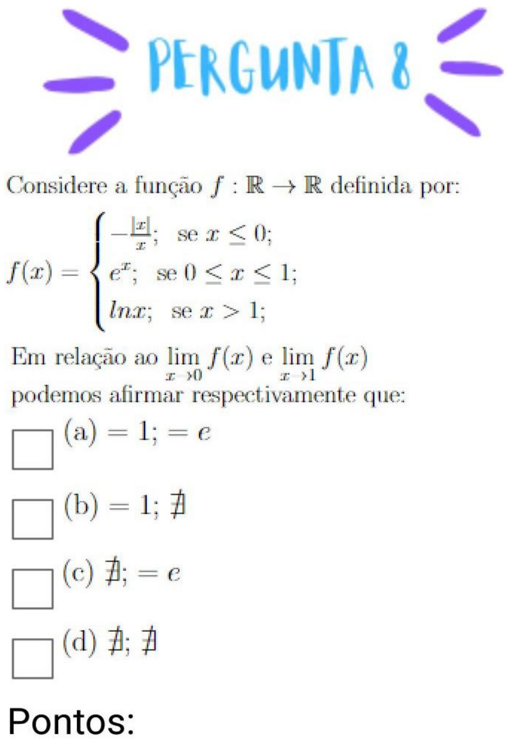
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{2x^2 - 5x} \text{ é?}$$

- (a) $\frac{1}{2}$
- (b) 1
- (c) $-\frac{3}{5}$
- (d) 0

Pontos:

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 2: Questão 8 (Nível Difícil) do 2º eixo da Etapa I


PERGUNTA 8

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{|x|}{x}; & \text{se } x \leq 0; \\ e^x; & \text{se } 0 \leq x \leq 1; \\ lnx; & \text{se } x > 1; \end{cases}$$

Em relação ao $\lim_{x \to 0} f(x)$ e $\lim_{x \to 1} f(x)$ podemos afirmar respectivamente que:

- (a) $= 1; = e$
- (b) $= 1; \nexists$
- (c) $\nexists; = e$
- (d) $\nexists; \nexists$

Pontos:

Fonte: Acervo da Pesquisa

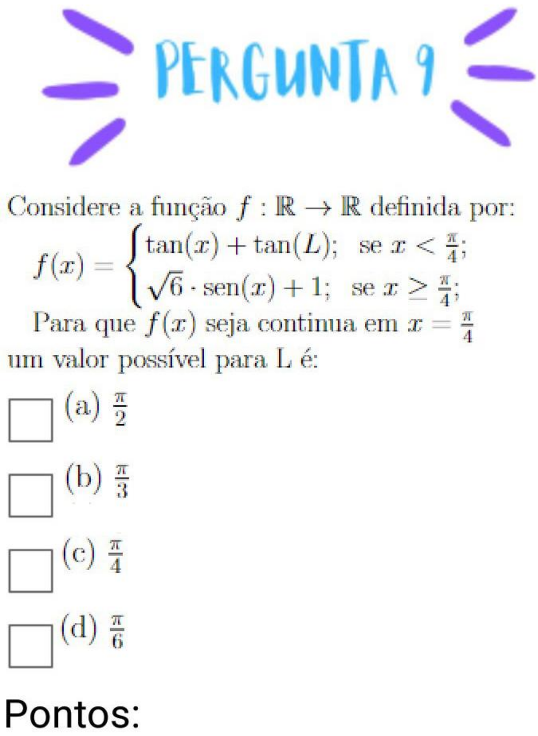
A performance dos alunos evidenciou que suas principais dificuldades na aprendizagem de limites laterais ocorreram nas condições para a existência de um

REnCiMa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 1-26, abr./jun. 2023

limite e nos limites laterais de uma função definida por partes. Podemos associar tal evidência, muito provavelmente, a dificuldades relacionadas aos diversos conteúdos de funções, de acordo com Rocha (2016). Por outro lado, Cury e Cassol (2004) já haviam destacado as dificuldades na compreensão e representação gráfica de funções definidas por partes, especialmente, relacionadas às dificuldades em associar as diferentes representações gráficas às diferentes definições apresentadas “por partes” do domínio das funções.

Por fim, na perspectiva de evidenciar dificuldades associadas ao 3º eixo sobre funções contínuas, apresentamos a questão com o maior número de erros (13 dos 21 alunos) — Figura 3.

Figura 3: Questão 9 (Nível Difícil) do 3º eixo da Etapa I



PERGUNTA 9

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \tan(x) + \tan(L); & \text{se } x < \frac{\pi}{4}; \\ \sqrt{6} \cdot \text{sen}(x) + 1; & \text{se } x \geq \frac{\pi}{4}; \end{cases}$$

Para que $f(x)$ seja continua em $x = \frac{\pi}{4}$ um valor possível para L é:

- (a) $\frac{\pi}{2}$
- (b) $\frac{\pi}{3}$
- (c) $\frac{\pi}{4}$
- (d) $\frac{\pi}{6}$

Pontos:

Fonte: Acervo da Pesquisa

A performance dos alunos evidenciou que suas principais dificuldades na aprendizagem de funções contínuas ocorreram nas condições de continuidade envolvendo limites e na análise da continuidade por meio de gráficos. Podemos associar tal evidência, muito provavelmente, a dificuldades relacionadas à definição de função contínua em um ponto que, de acordo com Abreu e Reis (2011), demanda uma articulação entre diversos conceitos, tais como domínio de uma função, limites laterais e existência de um limite, que nem sempre é realizada pelos alunos de forma satisfatória. Por outro lado, afloram as dificuldades com a interpretação de gráficos,

REnCiMa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 1-26, abr./jun. 2023

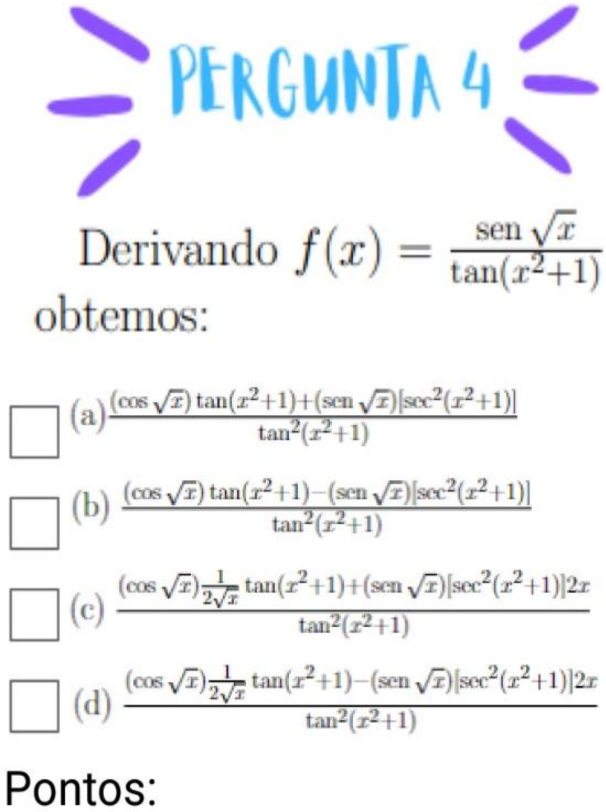
como já haviam relatado Souza e Andrade (2016).

6.2 Identificando as dificuldades de aprendizagem em Derivadas

Ressaltamos que 13 alunos participaram da aplicação da Etapa II) QID de Derivadas. O número médio de erros cometidos por esses alunos nas 9 questões dos 3 eixos de dificuldades foi 4,5 (isto é, os 13 alunos erraram, em média, 4,5 das 9 questões).

Na perspectiva de evidenciar dificuldades associadas ao 1º eixo sobre regras de derivação, apresentamos a questão com o maior número de erros (7 dos 13 alunos) — Figura 4.

Figura 4: Questão 4 (Nível Médio) do 1º eixo da Etapa II



Fonte: Acervo da Pesquisa

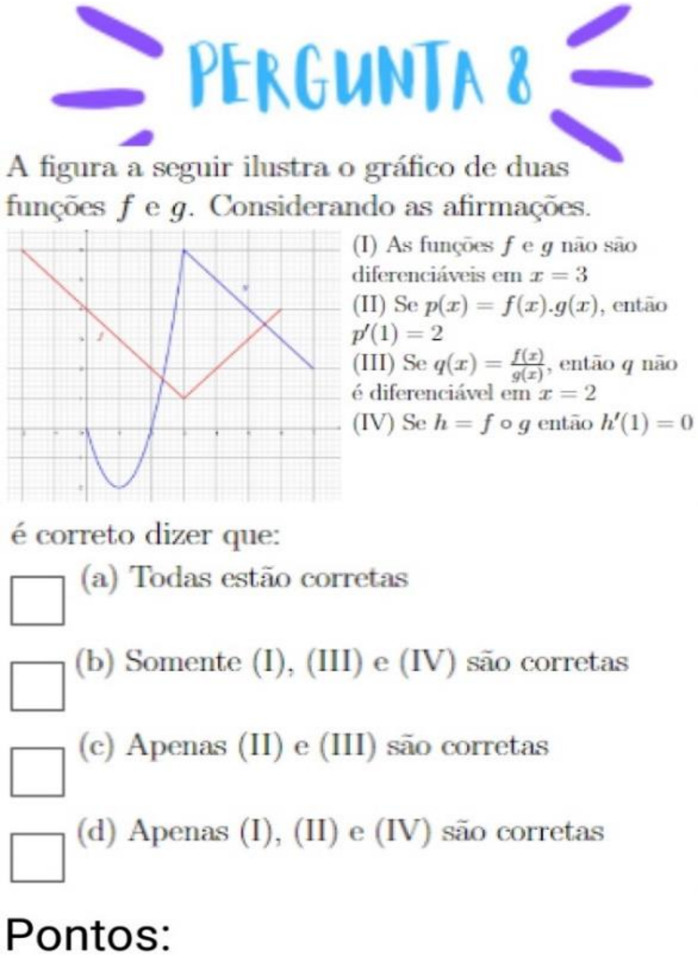
A performance dos alunos evidenciou que suas principais dificuldades na aprendizagem de regras de derivação ocorreram na aplicação da regra do quociente e na aplicação da regra da cadeia em conjunto com outras regras de derivação. Podemos associar tal evidência, muito provavelmente, aos erros que, em geral, são cometidos pelos alunos na aplicação de regras de derivação do tipo “erros de sinais”, dentre outros, como destacaram Cury e Cassol (2004). Por outro lado, as dificuldades de aplicação da regra da cadeia são verificadas frequentemente no ensino do Cálculo,

REnCiMa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 1-26, abr./jun. 2023

como destacou Rezende (2003).

Já na perspectiva de evidenciar dificuldades associadas ao 2º eixo sobre interpretação gráfica de derivadas, apresentamos a questão com o maior número de erros (8 dos 13 alunos) — Figura 5.

Figura 5: Questão 8 (Nível Difícil) do 2º eixo da Etapa II



PERGUNTA 8

A figura a seguir ilustra o gráfico de duas funções f e g. Considerando as afirmações.

(I) As funções f e g não são diferenciáveis em $x = 3$

(II) Se $p(x) = f(x).g(x)$, então $p'(1) = 2$

(III) Se $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, então q não é diferenciável em $x = 2$

(IV) Se $h = f \circ g$ então $h'(1) = 0$

é correto dizer que:

☐ (a) Todas estão corretas

☐ (b) Somente (I), (III) e (IV) são corretas

☐ (c) Apenas (II) e (III) são corretas

☐ (d) Apenas (I), (II) e (IV) são corretas

Pontos:

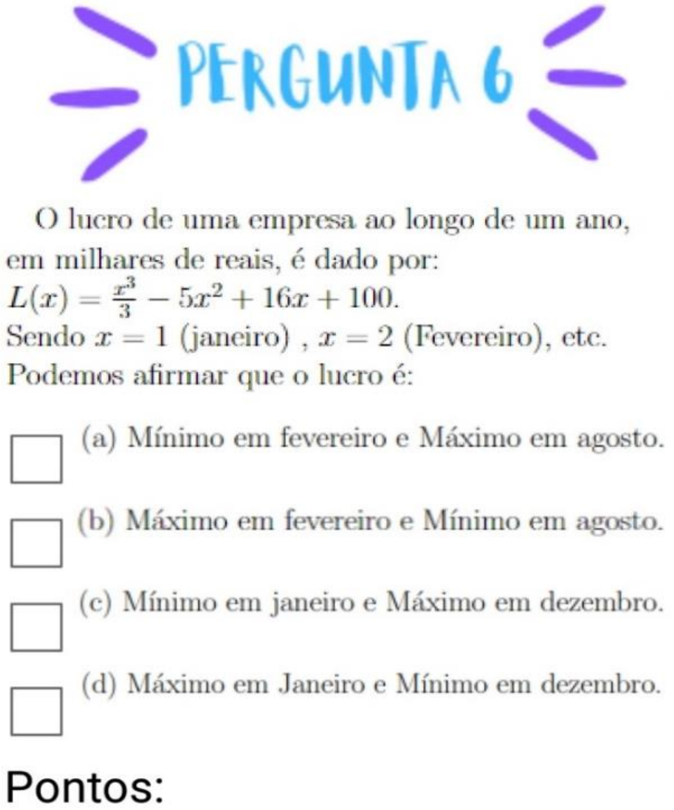
Fonte: Acervo da Pesquisa

A performance dos alunos evidenciou que suas principais dificuldades na aprendizagem de interpretação gráfica de derivadas ocorreram, uniformemente, na inclinação da reta tangente, no sinal da derivada e na verificação da diferenciabilidade de uma função por meio de gráficos. Podemos associar tal evidência, muito provavelmente, às dificuldades de interpretação de gráficos de funções no que diz respeito a propriedades como crescimento, decrescimento, variação, inclinação, dentre outras, como apontaram Souza e Andrade (2016). Por outro lado, nesse contexto, também não podemos desprezar as dificuldades relacionadas ao próprio traçado de gráficos que, segundo Nasser, Sousa e Torraca (2015) influenciam diretamente a aprendizagem de Cálculo.

REnCiMa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 1-26, abr./jun. 2023

Por fim, na perspectiva de evidenciar dificuldades associadas ao 3º eixo sobre aplicações de derivadas, apresentamos a questão com o maior número de erros (9 dos 13 alunos) — Figura 6.

Figura 6: Questão 6 (Nível Médio) do 3º eixo da Etapa II


PERGUNTA 6

O lucro de uma empresa ao longo de um ano, em milhares de reais, é dado por:
$L(x) = \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 16x + 100.$
Sendo $x = 1$ (janeiro) , $x = 2$ (Fevereiro), etc.
Podemos afirmar que o lucro é:

- (a) Mínimo em fevereiro e Máximo em agosto.
- (b) Máximo em fevereiro e Mínimo em agosto.
- (c) Mínimo em janeiro e Máximo em dezembro.
- (d) Máximo em Janeiro e Mínimo em dezembro.

Pontos:

Fonte: Acervo da Pesquisa

A performance dos alunos evidenciou que suas principais dificuldades na aprendizagem de aplicações de derivadas ocorreram em problemas envolvendo velocidade e aceleração, e em máximos e mínimos de uma função. Podemos associar tal evidência, muito provavelmente, às dificuldades matemáticas associadas às habilidades e competências gerais necessárias à resolução de problemas com derivadas, como destacou Homa (2018). Por outro lado, Nasser, Souza e Torraca (2015) pontuam que as dificuldades de resolução de problemas típicos do Cálculo, tais como taxas relacionadas e máximos e mínimos de uma função não residem apenas na aplicação do conceito de derivada, mas também em sua interpretação e representação geométrica.

6.3 Identificando as dificuldades na aprendizagem de Integrais

Ressaltamos que 10 alunos participaram da aplicação da Etapa III) QID de Integrais. O número médio de erros cometidos por esses alunos nas 9 questões dos 3 eixos de dificuldades foi 4,1 (isto é, os 10 alunos erraram, em média, 4,1 das 9

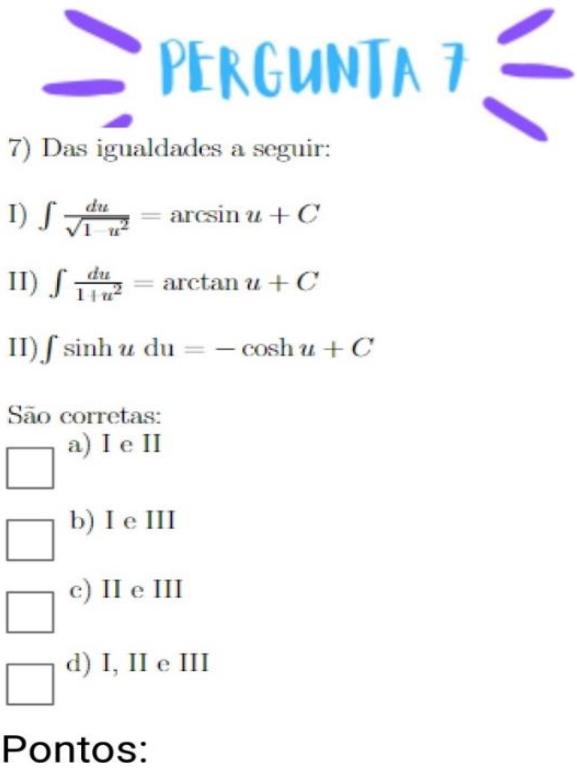
REnCiMa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 1-26, abr./jun. 2023

questões). Na perspectiva de evidenciar dificuldades associadas ao 1º eixo sobre integrais imediatas, apresentamos a questão com o maior número de erros (8 dos 10 alunos) — Figura 7.

A performance dos alunos evidenciou que suas principais dificuldades na aprendizagem de integrais imediatas ocorreram em integrais imediatas de funções polinomiais e em integrais imediatas de funções logarítmicas. Podemos associar tal evidência, muito provavelmente, aos erros nos procedimentos algébricos que, geralmente, são cometidos pelos alunos nas técnicas de integração imediata, como detalharam Cury e Cassol (2004). Por outro lado, dentre as dificuldades relacionadas aos diversos conteúdos de funções mencionadas por Rocha (2016), as funções polinomiais e logarítmicas ganham destaque, juntamente com as funções trigonométricas, o que pode contribuir para os erros no cálculo de suas integrais imediatas.

Já na perspectiva de evidenciar dificuldades associadas ao 2º eixo sobre aplicações de integrais a áreas, apresentamos a questão com o maior número de erros (7 dos 10 alunos) — Figura 8.

Figura 7: Questão 7 (Nível Difícil) do 1º eixo da Etapa III


PERGUNTA 7

7) Das igualdades a seguir:

I) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$

II) $\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C$

II) $\int \sinh u \text{ du} = -\cosh u + C$

São corretas:

a) I e II

b) I e III

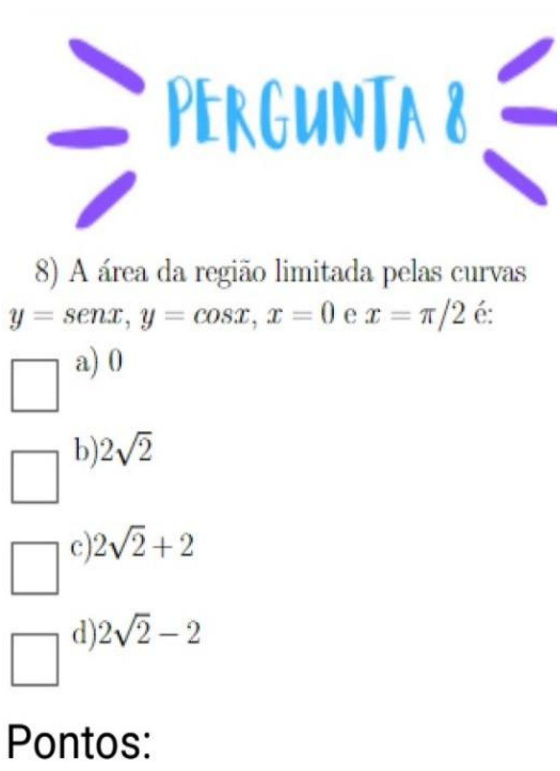
c) II e III

d) I, II e III

Pontos:

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 8: Questão 8 (Nível Difícil) do 2º eixo da Etapa III


PERGUNTA 8

8) A área da região limitada pelas curvas $y = senx$, $y = cosx$, $x = 0$ e $x = \pi/2$ é:

a) 0

b) $2\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{2}+2$

d) $2\sqrt{2}-2$

Pontos:

Fonte: Acervo da Pesquisa

A performance dos alunos evidenciou que suas principais dificuldades na

REnCiMa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 1-26, abr./jun. 2023

aprendizagem de aplicações de integrais a áreas ocorreram, principalmente, em áreas delimitadas por gráficos de funções trigonométricas. Podemos associar tal evidência, muito provavelmente, às dificuldades na interpretação e no estabelecimento dos limites de integração no cálculo da medida de áreas entre curvas, como ressaltaram Nasser *et al.* (2019). Por outro lado, as frequentes dificuldades relacionadas às propriedades gráficas de funções trigonométricas, especialmente, relacionadas a seus valores notáveis e variações, como destaca Rocha (2016), podem contribuir para os erros no cálculo da medida de áreas delimitadas por seus gráficos.

Por fim, na perspectiva de evidenciar dificuldades associadas ao 3º eixo sobre métodos de integração, apresentamos a questão com o maior número de erros (6 dos 10 alunos).

Figura 9: Questão 9 (Nível Difícil) do 3º eixo da Etapa III

9) Calculando $\int x\ln x$ dx obtemos:

☐ a) $\frac{x^2}{4}\ln x - \frac{x^2}{2} + C$

☐ b) $\frac{x^2}{4}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$

☐ c) $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{2} + C$

☐ d) $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$

Pontos:

Fonte: Acervo da Pesquisa

A performance dos alunos evidenciou que suas principais dificuldades na aprendizagem de métodos de integração ocorreram, destacadamente, na composição e iteração de métodos de integração. Podemos associar tal evidência, muito provavelmente, aos erros que, em geral, são cometidos pelos alunos relacionados à utilização de métodos que não conduzem à correta resolução da integral, de acordo com Cury e Cassol (2004). Por outro lado, também é possível relacionar, nesse contexto, as dificuldades específicas na utilização do método de integração por partes, como também destacam Cury e Cassol (2004).

REnCiMa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 1-26, abr./jun. 2023

7 Contribuições do QID para a aprendizagem de Cálculo

Apesar de objetivarmos a discussão das dificuldades de aprendizagem em Cálculo I evidenciadas pelo QID, entendemos que sua utilização também pode contribuir para a aprendizagem dos alunos. Dessa forma, por meio de um questionário de avaliação aplicado aos alunos participantes e da realização de uma entrevista semidiretiva com o professor da disciplina, oportunizamos a eles a possibilidade de se manifestarem sobre eventuais contribuições.

Observamos que alguns alunos identificaram como contribuição para sua aprendizagem a possibilidade de se ter um *feedback* imediato ao resolver cada questão e ao receber a pontuação total ao final de cada etapa. Um deles se referiu a uma "sensação de angústia e ansiedade", provavelmente se referindo, por exemplo, a uma situação em que, após a realização de uma prova, alguns professores demoram certo tempo para retornar as provas corrigidas para os alunos, ou seja, nesse caso, o *feedback* não ocorre de forma imediata nem rápida.

Como destacamos, as etapas do QID foram aplicadas em uma aula antes de cada uma das 3 provas. Assim, um outro bloco de respostas mostrou que alguns alunos identificaram o QID como uma oportunidade de preparação para a realização das provas. Observamos, então, que a realização das etapas do QID cumpriu, de certa forma e, ao menos para esse grupo de alunos, o papel da tradicional "revisão" que normalmente precede à realização das provas.

Nesse contexto, voltamos a destacar o fato de que o QID proporcionou aos alunos um *feedback* imediato de sua performance e, assim, possibilitou que eles pudessem (re)estudar os conteúdos nos quais ocorreram suas maiores dificuldades na resolução das questões, o que pode ser interpretado à luz de Richit (2010) ao afirmar que a utilização dos recursos das Tecnologias Digitais pode conduzir os estudantes a modos diferentes de produzir conhecimentos.

Também na entrevista com o professor, procuramos identificar suas impressões sobre as contribuições do QID para a aprendizagem dos alunos. Entretanto, assim como ressaltam Souza e Pataro (2015), inicialmente, o professor se mostrou muito interessado no processo de inserção das tecnologias em sala de aula, manifestou que já está convencido de que a utilização dos celulares se tornou uma necessidade para os alunos e que isso pode oferecer contribuições para o ensino:

> *Hoje em dia, você está dando aula e o aluno está lá, olhando o celular, então, ninguém sobrevive mais sem o celular; hoje, é necessidade. Estamos sendo obrigados a incorporar isso em nossas aulas senão daqui a pouco, vamos dar aula sozinhos (Professor – Entrevista, 2022).*

O professor observou que já utilizou tecnologias, porém, apenas no ensino de Cálculo III (Cálculo Diferencial e Integral de Várias Variáveis) e, portanto, o QID foi uma segunda experiência nesse sentido. Coadunando com as ideias de Masini e Moreira (2008), ele também comentou sobre a importância das TD não se tornarem "substitutas" do lápis e papel, mas sim "complementarem" tais tecnologias, apresentando a seguinte justificativa: "A nossa geração não foi criada com toda essa tecnologia, nós temos que saber os limites, onde começar, onde parar, onde dosar, mas não tem como deixar o giz de lado não" (Professor – Entrevista, 2022).

Essa última afirmação nos remete a Marin e Penteado (2011) quando destacam a preferência dos professores de Cálculo pelo quadro, em geral, para a realização de demonstrações e cálculos tradicionais. A partir dessa visão do professor, adentramos em suas impressões gerais sobre as contribuições da utilização do QID:

> *Eu achei muito bom o Quiz, mas se for pra usar mais uma vez, daria pra usar melhor, daria pra usar diferente. Diferente, no sentido de ter uma aula específica voltada para o Quiz. Os alunos gostaram, acharam interessante, mas devemos tirar um tempo a mais pra ele, uma aula para discutir sobre as questões do Quiz, depois da aplicação (Professor – Entrevista, 2022).*

Essas possibilidades didáticas levantadas pelo professor nos conduzem a refletir sobre a nossa experiência de desenvolvimento e aplicação do QID.

8 Considerações Finais

Consideramos que uma das revelações de nossa experiência de pesquisa é que diagnosticar as dificuldades de aprendizagem dos alunos de forma constante, ao longo de todo o semestre letivo, contribui tanto para os processos de ensino como de aprendizagem, uma vez que a identificação das dificuldades deve ser feita de forma progressiva e a tempo de focar na aprendizagem dos alunos a partir de tal identificação de suas dificuldades. Sendo assim, professores e alunos podem, juntos, buscarem desenvolver ações para redirecionar os processos educativos na sala de aula de Cálculo I.

Nesse contexto, percebemos a importância de os professores utilizarem uma avaliação diagnóstica no Ensino Superior como um suporte não apenas para identificar os erros cometidos por seus alunos, mas, principalmente, para tentar

REnCiMa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 1-26, abr./jun. 2023

REnCiMa
Revista de Ensino de Ciências e Matemática

contribuir para a sua aprendizagem de tal maneira que isso se reflita em uma melhoria de sua performance nos processos avaliativos de Cálculo I, em particular, e ao longo dos seus cursos, de forma geral. Essa ação faz-se necessária para que possamos oferecer aos alunos que estão matriculados em Cálculo I condições para que eles consigam “ultrapassar a barreira do senso comum estabelecido” sobre seu ensino e, também, sobre sua aprendizagem.

Outro destaque específico que nossa experiência de pesquisa revelou é que a aplicação de um aplicativo do tipo Quiz como o que desenvolvemos proporciona aos alunos uma chance de testarem seus conhecimentos antes de fazer as avaliações e, assim, confere uma oportunidade de revisar / reestudar conteúdos nos quais, claramente, eles ainda não se sentem seguros em termos de entendimento.

Nesse sentido, os alunos aprovaram a aplicação do QID antecedendo as avaliações e nossa pesquisa apontou que eles manifestaram ficar mais confiantes para fazer as avaliações subsequentes, sugerindo um maior tempo para a realização das etapas do QID, incluindo uma discussão mais aprofundada de todas as questões.

Cabe, ainda, destacar que os resultados de nossa pesquisa apontaram que uma grande parte das dificuldades de aprendizagem em conceitos nucleares do Cálculo I por parte dos alunos podem ser associadas, muito provavelmente, a suas dificuldades relacionadas a conteúdos da Educação Básica, especialmente, no caso de limites e continuidade. Outra parte bastante significativa das dificuldades recai sobre as aplicações, especialmente, no caso de derivadas e integrais, que podem ser relacionadas às dificuldades matemáticas associadas às habilidades e competências gerais necessárias à resolução de problemas.

Diante disso, ressaltamos a importância de um ensino de Cálculo I focado não somente na aplicação de regras para os diversos cálculos, o que, tradicionalmente, não traz grandes dificuldades para os alunos na realização de tais cálculos, mas que também privilegie a interpretação, a representação e a aplicação dos conceitos nucleares do Cálculo I.

Destarte, concluímos este artigo apontando para a possibilidade e a necessidade de futuros estudos relacionados às dificuldades de aprendizagem em Cálculo I, uma vez que pesquisas com tal foco podem lograr contribuições para toda a área de Educação Matemática no Ensino Superior.

REnCiMa, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 1-26, abr./jun. 2023

Agradecimentos

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), pelo apoio financeiro à realização da pesquisa.

Referências

ABREU, O. H.; REIS, F. S. Uma discussão sobre o papel das definições formais no ensino e aprendizagem de limites e continuidade em Cálculo I. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 3, p. 439-459, 2011.

ANJOS, I. M. **O Quiz Interativo Digital na identificação de dificuldades de aprendizagem em Cálculo I**. 2023. 114f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto.

BICALHO, D. C.; REIS, F. S. O contexto digital e os estilos de aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral. **REnCima**, São Paulo, v. 12, n. 1, p.1-26, 2021.

CURY, H. N.; CASSOL, M. Análise de Erros em Cálculo: uma Pesquisa para Embasar Mudanças. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 6, n. 1, p. 27-36. 2004.

FARDO, M. L. A gameficação aplicada em ambientes de aprendizagem. **Renote**, Porto Alegre, v. 11, n. 1, p. 1-9, 2013.

GROH, F. Gamification: State of the Art Definition and Utilization. In: Proceedings of the 4th Seminar on Research Trends in Media Informatics, 2012, Ulm. Ulm, DE: Ulm University, 2012, p. 39-46.

HOMA, A. I. R. **Avaliação Diagnóstica Auxiliada por Computador**: identificação das dificuldades dos alunos dos cursos de Engenharia na resolução de problemas com Derivadas. 2018. 213f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) — Universidade Luterana do Brasil. Canoas.

MARIN D.; PENTEADO, M. G. Professores que utilizam tecnologia de informação e comunicação para ensinar Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 3, p. 527-546, 2011.

MASINI, E. F. S.; MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa**: condições para ocorrência e lacunas que levam a comprometimentos. 1. ed. São Paulo: Vetor. 2008.

NASSER, L. Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de Cálculo. In: Anais do 9º Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. Belo Horizonte: SBEM, 2007, p. 1-12.

NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráficos. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: pesquisas e debates. 1. ed. Recife: SBEM, 2009, p. 43-58.

NASSER, L.; SOUSA, G. A.; TORRACA, M. A. A. Aprendizagem de Cálculo: dificuldades e sugestões para a superação. In: Anais da 14ª Conferência

Interamericana de Educação Matemática, 2015, Chiapas. Chiapas, MX: CIAEM, 2015, p. 1-10.

NASSER, L.; BIAZUTTI, A.; TORRACA, M. A. A.; BARROS, J. Investigando estratégias para aprimorar o desempenho em Cálculo I. In: Anais da 15ª Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2019, Medellín. Medellín, CO: CIAEM, 2019, p. 1-10.

PALIS, G. R. Computadores em Cálculo: uma alternativa que não se justifica por si mesma. **Temas e Debates**, Blumenau, v. 8, n. 6, p. 22-38, 1995.

REIS, F. S.; COMETTI, M. A.; SANTOS, E. S. Contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis. **REnCima**, São Paulo, v. 10, n. 2, p.15-29, 2019.

REIS, F. S.; ESTEVES, F. R. Contribuições das Tecnologias da Informação e Comunicação à formação de professores de Matemática na modalidade a distância. **Revemop**, Ouro Preto, v. 2, n. 1, p. 1-21, 2020.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. 2003. 468f. Tese (Doutorado em Educação) — Universidade de São Paulo. São Paulo.

RICHIT, A. **Aspectos conceituais e instrumentais do conhecimento da prática do professor de Cálculo Diferencial e Integral no contexto das Tecnologias Digitais**. 2010. 243f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.

ROCHA, M. M. **Releitura do processo de aprendizagem de estudantes repetentes de Cálculo I**. 2016. 247f. Tese (Doutorado em Educação) — Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória.

SOUZA, G. A.; ANDRADE, L; R. P. Cálculo Diferencial e Integral I: como os alunos estão iniciando essa disciplina no curso de Engenharia. In: Anais do 12º Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. São Paulo: SBEM, 2016, p. 1-12.

SOUZA, J. R.; PATARO, P. R. M. **Vontade de Saber Matemática**. 3. ed. São Paulo: FTD, 2015.