

Tarefas para o desenvolvimento do raciocínio combinatório no 6º ano do Ensino Fundamental: uma proposta

Jéssica Bueno da Silva¹

Antonio Carlos de Souza²

Cristiane de Arimatéa Rocha³

Resumo: A Combinatória é formalizada e trabalhada com maior ênfase no Ensino Médio, porém há necessidade em discutir ideias relacionadas a ela desde a Educação Infantil, uma vez que as crianças possuem noções intuitivas referentes a situações combinatórias, são capazes de compreender relações básicas e podem desenvolver procedimentos adequados à solução de problemas desta natureza no seu cotidiano. Assim, ressalta-se a importância que sua abordagem seja feita gradativamente de modo a torná-la mais compreensiva e prazerosa, utilizando diversas ferramentas para trabalhar com os alunos. Diante disso, o presente artigo tem por objetivo apresentar algumas situações de ensino para abordagem da Combinatória no 6º ano do Ensino Fundamental. Apresentamos e discutimos problemas combinatórios, utilizando diferentes recursos, a fim de contribuir para elaboração de estratégias de resolução com esse público e para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Palavras-chave: Combinatória. Permutação. Combinação. Arranjo. Produto Cartesiano.

Tasks for the development of combinatorial reasoning in 6th grade Middle School: a proposal

Abstract: Combinatorics is formalized and worked in class with greater emphasis in High School, but there is a need to discuss the ideas related to Combinatorics since Kindergarten. Considering that children have intuitive notions regarding combinatory situations, they are able at this stage to understand basic connections, developing suitable procedures for solve problems of this nature in their daily lives. Consequently, it is important to consider a gradual approach in order to make this matter more comprehensive and enjoyable, using different tools to work with students. This article aiming to present some teaching situations to approach Combinatorics in 6th grade Elementary School. We present and discuss combinatorial problems, using different resources, in order to contribute to the elaboration of resolution strategies with these subjects and to the development of combinatorial reasoning.

Keywords: Combinatorics. Middle School. Permutation. Combination. Arrangement. Cartesian Product.

Tareas para el desarrollo del razonamiento combinatorio en estudiantes del 6º grado de la Enseñanza Fundamental: una propuesta

Resumen: La combinatoria se formaliza y se trabaja con mayor énfasis en la escuela secundaria, pero existe la necesidad de discutir ideas relacionadas con la

¹ Escola Estadual Nelson Pizzotti Mendes — Santo André (SP), Brasil. ✉ jessica.bueno@unesp.br  <https://orcid.org/0000-0002-6203-4965>

² Universidade Estadual Paulista — Guaratinguetá (SP), Brasil. ✉ ac.souza@unesp.br  <https://orcid.org/0000-0002-8044-0481>

³ Universidade Federal de Pernambuco — Caruaru, (PE), Brasil. ✉ cristiane.arocha@ufpe.br  <https://orcid.org/0000-0002-4598-2074>

combinatoria desde el jardín de infancia, ya que los niños tienen nociones intuitivas sobre situaciones combinatorias, son capaces de comprender relaciones básicas y pueden desarrollar procedimientos adecuados para solucionar problemas de esta naturaleza en su vida diaria. Por eso, es importante que su abordaje se haga de forma paulatina para que sea más completo y ameno, utilizando distintas herramientas para trabajar con los alumnos. Por lo tanto, este artículo tiene el objetivo de presentar algunas situaciones de enseñanza para el abordaje de Combinatoria en el 6º año de la primaria. Presentamos y discutimos problemas combinatorios, utilizando diferentes recursos, para contribuir a la elaboración de estrategias de resolución con este público y al desarrollo del razonamiento combinatorio.

Palabras clave: Combinatoria. Permutación. Combinación. Variación. Producto Cartesiano.

1 Introdução

As origens da Combinatória são remotas, e seu desenvolvimento ocorreu ao longo dos anos. Segundo Souza (2010), o processo de contagem ocorreu devido à necessidade de controlar a quantidade de coisas que o homem possuía. Eles contavam uma a uma utilizando pedras e nós em cordas, mas quando esse número excedia os recursos possíveis que utilizavam para contar, alguns problemas do seu dia a dia não eram solucionados, surgindo a necessidade de outro método de contagem: posteriormente aparece a noção de agrupamentos de objetos de um conjunto, não sendo assim preciso contá-los um a um.

Cardoso e Guirado (2007) comentam que, ao longo do tempo, a Combinatória se originou também no estudo dos jogos de azar, sofreu intensas mudanças. Hoje seus métodos são aplicados em diversas áreas, como no cálculo de probabilidades, em problemas de transporte, de confecção de horários, de elaboração de planos de produção, de economia, de lógica e outros.

Ao trabalhar com esse conteúdo em sala de aula, o professor pode observar que a progressão do desenvolvimento do raciocínio combinatório se baseia na compreensão de diversidades de situações, na utilização de diferentes estratégias e na complexidade das situações-problema propostas. Lockwood, Wasserman e Tillema (2020) afirmam que, desde o início da década de 1970, pesquisadores defendem a inserção da combinatória no currículo da educação básica.

Aspectos sobre como trabalhar combinatória e o que apresentam os documentos curriculares permeiam a prática docente. Diante disso, o presente texto tem por objetivo apresentar algumas situações de ensino para abordagem da Combinatória no 6º ano do Ensino Fundamental.

A escolha do 6º ano do Ensino Fundamental se deu por ser o primeiro dos anos finais do Ensino Fundamental. Além disso, a especificação desse ano e nível de escolarização fundamenta-se nas discussões dos documentos curriculares oficiais a Base Nacional Comum Curricular — BNCC (BRASIL, 2018) e os Parâmetros Curriculares Nacionais — PCN (BRASIL, 1998) que orientam a abordagem da Combinatória ao longo da Educação Básica.

2 Elaboração de tarefas para o ensino e a aprendizagem de Matemática

Compreendemos que a proposta, a escolha, a adaptação e a elaboração de atividades, situações-problemas e tarefas para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática perpassam os conhecimentos e as competências do professor em seu ofício (STEIN, GROVER e HENNINGSEN, 1996, PERRENOUD, 2000; BALL e FORZANI, 2010; CIRINO e JESUS, 2014).

Perrenoud (2000), ao indicar as competências para ensinar de um professor— discute sobre o papel das situações-problemas como subsídio para progressão de aprendizagens, refletindo sobre a dupla competência do professor na administração dessas situações. Para esse autor, o professor, imbuído nessa competência, “investe na concepção e, portanto, na antecipação, no ajuste das situações-problemas ao nível e às possibilidades dos alunos; manifesta-se também ao vivo, em tempo real, para guiar uma improvisação didática e ações de regulação” (PERRENOUD, 2000, p.45).

Dessa forma, além de pensar nos aspectos relativos aos conceitos matemáticos envolvidos, ao elaborar uma tarefa, o professor necessita prever, ou ao menos, idealizar como a proposta vai interagir com os estudantes. Ball e Forzani (2010) indicam que professores de Matemática se utilizam de um conhecimento específico que permite identificar as dificuldades no entendimento do aluno e propor situações para auxiliá-lo na compreensão de novos conceitos.

Cirino e Jesus (2014) destacam o papel das tarefas no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, já que são atividades mais frequentes em sala de aula. De acordo com essas autoras, “Refletir a respeito das tarefas que propõe aos alunos pode ser uma forma de o professor ficar atento aos processos de ensino e de aprendizagem e avaliar o impacto que suas decisões têm sobre estes processos.” (CIRINO; JESUS, 2014, p.752).

Stein, Grover e Henningsen (1996, p.459) acrescentam que “as tarefas

matemáticas com as quais os alunos se envolvem determinam não apenas o que aprendem, mas também como pensam, desenvolvem, usam e dão sentido à matemática”. As autoras esclarecem que tarefas matemáticas podem possuir demandas cognitivas que inserem os estudantes em atividades matemáticas as quais podem exigir interpretação, possibilitar variadas estratégias de solução, múltiplas representações e, ainda, proporcionar aos alunos que explicitem justificativas dos procedimentos adotados.

Jesus, Cirino e Oliveira (2018) fizeram a proposta de um processo formativo para três professoras dos anos finais do Ensino Fundamental para averiguar como elas compreenderam tarefas cognitivamente desafiadoras e propuseram a utilização dessas tarefas nas aulas. Tais autoras salientam o papel do professor na abordagem dessas tarefas desafiadoras em sala de aula, indicando algumas habilidades necessárias para essa implementação:

aceitar/valorizar e compreender as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos; aceitar/reconhecer que o aluno pode lidar com tarefas de elevada demanda cognitiva; valorizar o processo e não somente as respostas corretas; solicitar e incentivar que os alunos apresentem justificativas para suas resoluções e partilhem suas ideias; apoiar o pensamento matemático do aluno; utilizar as ideias dos alunos para sustentar as discussões e o processo de sistematização das ideias matemáticas; construir relação de confiança na capacidade de os alunos se envolverem nesse tipo de tarefa; considerar o nível de escolaridade, a idade e os conhecimentos prévios dos alunos na escolha da tarefa, e trabalhar com as inseguranças dos alunos (JESUS, CIRINO e OLIVEIRA, 2018, p. 42).

O processo de implementação dessas tarefas em sala de aula exige do professor adaptação ou elaboração. O professor deve priorizar tarefas desafiadoras que permitam ao aluno construir suas próprias estratégias, explicar suas estratégias, justificar seu pensamento e não explicitar um modo de como resolvê-las (JESUS, CIRINO e OLIVEIRA, 2018).

O padrão profissional para o ensino de matemática publicado pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1991, p.24) afirma que é "responsabilidade central dos professores selecionar e desenvolver tarefas e materiais valiosos que criam oportunidades para os alunos desenvolverem entendimentos matemáticos, competências, interesses e disposições”.

Soma-se ao exposto por essas pesquisas, a Base Nacional Comum Curricular — BNCC (BRASIL, 2017) que orienta para os anos finais do Ensino Fundamental

situações que promovam o estabelecimento de relações não só entre matemática e o cotidiano, mas também relações com outros conceitos matemáticos, ou mesmo, com outras áreas. Para além dessas situações, o documento destaca ainda a necessidade de promover comunicação de ideias matemáticas usando diferentes linguagens simbólicas, variadas representações, possibilitando inclusive a argumentação.

Outro aspecto evidenciado na BNCC é a promoção da habilidade de alunos para a elaboração de problemas, proporcionando a reflexão sobre os enunciados dos problemas, e sobre alterações sofridas caso alguma condição seja ou não verificada, ou informações sejam acrescentadas ou retiradas de uma situação proposta. Segundo a BNCC, para auxiliar na abstração necessária para compreensão de objetos matemáticos, “é importante que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido” (BRASIL, 2017, p. 299). Consoante o exposto, defende-se o papel da elaboração de tarefas na formação de professores, ainda, na Educação Básica, propiciando a reflexão sobre diferentes aspectos que permeiam conteúdos matemáticos específicos.

3 Combinatória

A Combinatória estuda técnicas de contagem direta e implícita de agrupamentos possíveis, a partir de elementos que satisfaçam a determinadas condições (BORBA, ROCHA e AZEVEDO, 2015). Para Schmidt e Mariani (2017) a escolha de estratégias para resolução de problemas combinatórios está vinculada, entre outros, a fatores como o modelo ao qual pertence o problema. Segundo Morgado et al (1991), a Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas, a qual apresenta dois tipos de problemas que ocorrem com mais frequência em seu estudo. São eles:

- 1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições;
- 2) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem condições dadas (MORGADO et al, 1991, p. 2).

Os PCN (BRASIL, 1997) orientam sobre o ensino de combinatória nos anos iniciais que os estudantes estejam em contato com situações que envolvam arranjos, combinações e permutações e, especialmente, o uso do princípio fundamental de contagem. Na mesma direção, a BNCC (BRASIL, 2017) enfatiza que os problemas de contagem envolvendo o raciocínio combinatório estejam presentes desde os anos

iniciais do Ensino Fundamental.

A BNCC complementa, ainda, em suas habilidades, a importância e o objetivo ao se trabalhar com o ensino da Combinatória, das quais destacamos:

(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais (BRASIL, 2017, p. 291).

(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo (BRASIL, 2017, p. 313).

As habilidades mencionadas, apesar de não incluírem no 6º ano a discussão de Combinatória, vão de encontro ao objetivo da pesquisa aqui apresentada, pois ao abordar problemas combinatórios no Ensino Fundamental, pretende-se desenvolver, desde cedo, o raciocínio combinatório do aluno, a fim de compreender suas estratégias e formas de registro pessoais, de modo que ele possa adquirir um método sistemático e gradativo para a resolução dos problemas, visando a uma posterior formalização no Ensino Médio.

De acordo com Borba (2013), os problemas combinatórios típicos são os de permutação, arranjo, combinação e produto cartesiano que, de forma direta ou indireta, solicitam possíveis agrupamentos que atendem a específicas formas de escolha e de ordenação de elementos de um ou mais de um conjunto, no qual cada um apresenta suas características próprias e maneiras de organizar o raciocínio combinatório. A autora apresenta em sua discussão algumas características relacionadas aos problemas combinatórios.

Segundo Borba (2013), os problemas do tipo produto cartesiano são determinados a partir da escolha de elementos dispostos em diferentes conjuntos; nos problemas de arranjo, os elementos são escolhidos a partir de um único conjunto, mas nem todos os elementos são escolhidos todas as vezes, e a ordem de escolha desses elementos constitui novas possibilidades; nos problemas de combinação, alguns elementos de um único conjunto são escolhidos, e a ordem dessa escolha não constitui novas possibilidades. Já nos casos de permutação, que são tratados como casos particulares de arranjo, todos os elementos do conjunto dado são utilizados. Para Borba (2013, p. 4), “cognitivamente falando, entretanto, estes são tipos de problemas distintos, pois nos arranjos os elementos não são todos utilizados na escolha de cada possibilidade e nas permutações todos os elementos são utilizados

em cada uma das possibilidades”. Isto esclarece a distinção entre esses dois tipos de problema.

O estudo da Combinatória a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental é essencial à formação do indivíduo, especificamente no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Nesse sentido, os PCN orientam que

o emprego de problemas envolvendo combinatória leva o aluno, desde cedo, a desenvolver procedimentos básicos como a organização dos dados em tabelas, gráficos e diagramas, bem como a classificação de eventos segundo um ou mais critérios, úteis não só em Matemática como também em outros campos, o que reforça a argumentação dos defensores de seu uso desde as séries iniciais do ensino fundamental (BRASIL, 1998, p. 52).

Entretanto, por mais que os processos de contagem estejam presentes no nosso cotidiano, a Combinatória muitas vezes só é abordada no Ensino Médio, sendo um dos principais motivos pelo qual os alunos demonstram dificuldade no assunto. Se o processo de ensino e aprendizagem de combinatória ocorrer de maneira contínua e distribuída, pode preparar o aluno para vivenciar os conceitos nos anos posteriores, exercendo um papel relevante no desenvolvimento da aprendizagem e do raciocínio matemático.

A BNCC (BRASIL, 2017) defende que o emprego desses problemas deve ser gradativo, a fim de desenvolver procedimentos básicos, como a organização dos dados em tabelas, gráficos e diagramas, bem como a classificação de eventos segundo um ou mais critérios, úteis não só em Matemática, mas também em outros campos.

No entanto, esse conteúdo deve ser ensinado de forma interativa entre o professor e seus alunos. Aquino (2010) ressalta que se deve destacar as ideias em comum, reunindo novas formas de pensar e de interagir com as informações propostas, ou seja, o professor deve incentivar o educando a problematizar, a raciocinar, tendo seu aluno como sujeito ativo e participante do processo de ensino e aprendizagem. Pensando no processo de ensino e aprendizagem de combinatória, a BNCC estabelece uma ampliação e aprofundamento desta à noção associada ao ensino de Probabilidade e Estatística:

No Ensino Fundamental — Anos Finais, o estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica — probabilidade frequentista. A progressão dos

conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem (BRASIL, 2017, p. 274).

A ampliação e aprofundamento do processo pode ser erroneamente aplicada. De modo geral, os alunos costumam identificar fórmulas para resolver determinado problema, como consequência de talvez não terem participado de uma sistematização adequada do conteúdo anteriormente.

Nesse contexto, Silva e Pessoa (2015) ressaltam que, se o trabalho com a Combinatória não acontecer de forma sistemática desde cedo, esse tipo de método acaba influenciando os alunos a aplicarem os dados nas fórmulas e, quando se depararem com uma diversidade de problemas, não apresentarão um bom resultado, pois não conseguirão diferenciar a forma de resolução e o tipo de agrupamento. Os alunos conseguem desenvolver um raciocínio muito mais criativo e flexível ao, desde cedo, compreenderem os diferentes tipos de problemas combinatórios, em vez de deixarem essa aprendizagem para mais tarde, no Ensino Médio.

Silva e Pessoa (2015) defendem que quanto antes a Combinatória for introduzida aos alunos, mais consistente e significativa será sua compreensão e aprendizado. O raciocínio combinatório é muito importante para o raciocínio lógico matemático, além de ter relação com outras áreas do conhecimento, uma vez que sua aplicabilidade vai além da teoria e da sala de aula; por isso há a necessidade de um trabalho com a temática desde os primeiros anos da Educação Básica. Estudos de Silva e Pessoa (2015) apontam que os alunos, ao se depararem com a formalização da Combinatória no Ensino Médio, apresentam dificuldades em situações em que precisam identificar qual tipo de agrupamento utilizar por não terem uma base de problemas combinatórios desde cedo, correndo o risco de serem meros aplicadores de fórmulas.

Segundo Almeida e Ferreira (2008), proporcionar ao aluno situações de discussões, dando-lhe a oportunidade de expor suas ideias, propor sugestões, questionar e refletir, faz com que ele não dê importância ao fato de errar, e sim ao que acarretou o erro, além de desenvolver sua autoconfiança para buscar novas alternativas, ampliando sua autonomia e sua capacidade de argumentação.

Os PCNs (BRASIL, 1997) destacam que os alunos, ao chegarem à sala de aula, trazem diferenciadas ferramentas básicas para a aprendizagem matemática, por

exemplo, classificar, ordenar, quantificar e medir. Tais ferramentas são desenvolvidas por meio das experiências que vivenciam em seu grupo sociocultural. A BNCC (BRASIL, 2017) acentua também que, desde os anos iniciais, não se pode frear o entusiasmo e a curiosidade pela aprendizagem tão comum nessa etapa da escolaridade, muito menos os conhecimentos prévios dos alunos. Ao abordar a Combinatória antes de sistematizar as fórmulas, que são apresentadas no Ensino Médio, os alunos desenvolvem o raciocínio combinatório ao longo dos anos de escolarização que, de modo geral, é muito importante para a aprendizagem e para o entendimento matemático, sendo possível, nesse processo, verificar a compreensão dos alunos, suas facilidades, dificuldades e estratégias para a resolução de problemas de combinatória.

Rocha (2011, p. 100) salienta o processo de ensino e de aprendizagem de combinatória nas diferentes etapas de escolarização “a importância do trabalho do professor em selecionar atividades adequadas e as relações entre as áreas, de forma que promovam a aprendizagem do aluno”. Em sua pesquisa em relação ao ensino e aprendizagem de combinatória, entrevistou professores de anos iniciais, anos finais do Ensino Fundamental e professores do Ensino Médio.

Nessa pesquisa, Rocha (2011) constatou que professores dos anos finais do Ensino Fundamental afirmaram que, em aulas de Combinatória, discutem problemas que envolvem contextos relacionados ao cotidiano dos estudantes; focalizam noções relativas ao princípio multiplicativo e de possibilidade; fazem uso de materiais manipulativos (tampinhas, roupas) e, em um dos casos, os materiais são utilizados com apoio de tabela para registro das possibilidades, além de ampliar gradativamente o número total de possibilidades para justificar a necessidade de procedimentos de resolução não enumerativos para problemas combinatórios.

A seguir apresentamos algumas tarefas que usam diferentes recursos para a exploração e produção do conhecimento envolvendo a Combinatória.

4 Tarefas para o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório no 6º ano do Ensino Fundamental

De acordo com Ponte (2014), uma tarefa é usualmente proposta pelo professor, mas tem que ser interpretada pelo aluno. Trata-se de uma ferramenta de mediação fundamental no ensino e na aprendizagem da Matemática. O autor afirma, ainda, que

uma tarefa pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos.

O processo de elaboração e de proposição de tarefas com base em problemas combinatórios realizado pelo professor pode contribuir — dentre outros aspectos — para despertar no aluno o interesse pela criação de estratégias próprias de resolução de modo a desenvolver o raciocínio combinatório.

As propostas de tarefas apresentadas nesse artigo têm como finalidade abrir possibilidades ao professor de introduzir problemas que envolvam combinatória desde o Ensino Fundamental. Tal qual entendemos ser possível — por meio de problemas de combinatória — atribuir significados a conteúdos matemáticos presentes no cotidiano, além de possibilitar a compreensão na formalização das fórmulas nos anos subsequentes.

Buscamos trazer situações que exploram os conteúdos e as habilidades propostas na BNCC (BRASIL, 2017) que visam a abordagem e o desenvolvimento do raciocínio combinatório por meio de diferentes tarefas que versaram sobre problemas de produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação.

4.1 A tarefa “Vestindo a boneca”⁴

Julia vai sair com suas amigas e está decidindo qual roupa irá usar. Dentre as duas camisetas, duas saias e dois pares de sapatos, quantos *looks* diferentes Julia pode montar?

Figura 1: Boneca, roupas e sapatos



Fonte: Google imagens

Para a utilização da situação, será necessário o seguinte material: folhas de papel com figuras da boneca; figuras das saias, camisetas e sapatos; folha sulfite para

⁴ Adaptado de Arcanjo (2015)

registro das combinações; tesoura; lápis; e borracha.

Trata-se de uma tarefa sobre produto cartesiano, pois, segundo Borba (2013), os problemas desse tipo são determinados a partir da escolha de diferentes conjuntos, ou seja, o produto cartesiano revela uma relação entre dois conjuntos no qual é possível formar um terceiro conjunto a partir de todos os pares que se podem formar com o primeiro e segundo conjunto.

De acordo com Rocha e Souza (2021, p. 479), os problemas de produto cartesiano foram os mais enfatizados nas pesquisas brasileiras sobre Combinatória nos anos iniciais e na Educação Infantil, possuindo “estruturas diferenciadas. como, o uso de distratores em seus enunciados, produto cartesiano inverso e problemas com duas ou mais ações”. Nesse caso específico, a estrutura do problema cartesiano utilizou três conjuntos (camisetas, saias e sapatos) para os quais um elemento de cada conjunto deve ser escolhido para formar as possibilidades, que gera um quarto conjunto.

Para seu desenvolvimento, os alunos em grupo, receberão a imagem da boneca e as respectivas roupas para serem recortadas. Pede-se a eles que façam a composição dos diferentes looks com a manipulação do material e, em seguida, realizem os registros — da maneira que acharem melhor — de cada look que conseguirem compor.

Após os registros, discute-se com os grupos os resultados encontrados e as estratégias que cada grupo utilizou para alcançá-los. No Quadro 1, apresentamos uma possível solução. Essa estratégia pode ser discutida, uma vez que se apresenta uma enumeração das possibilidades de modo sistematizado.

Quadro 1: Número de possibilidades da tarefa “Vestindo a boneca” com uso de listagem sistematizada

Camiseta	Saia	Sapato
Camiseta	Saia	Sapato
Camiseta	Saia	Sapato
Camiseta	Saia	Sapato
Camiseta	Saia	Sapato
Camiseta	Saia	Sapato
Camiseta	Saia	Sapato
Camiseta	Saia	Sapato

Fonte: Elaboração própria

A ideia de propor um problema de produto cartesiano com número reduzido de

possibilidades (doze) possibilita o aparecimento de diferentes estratégias de resolução, podendo ser resolvido por árvore de possibilidades, uso do Princípio Fundamental da Contagem, entre outras. Posteriormente o número de possibilidades pode ser ampliado. A inclusão de material manipulativo pode, conforme apontam Rocha e Souza (2021, p.479), possibilitar “uma melhor participação dos alunos na resolução das questões”.

Jesus, Cirino e Oliveira (2018) afirmam a importância de o professor, na mediação de resolução de problemas, valorizar — dentre outras habilidades, — as diferentes estratégias dos estudantes, possibilitando a discussão do raciocínio matemático envolvido, como também a apresentação de justificativas visando a sistematização da estratégia. Entender, portanto, aspectos estruturais do problema combinatório, bem como a diversidade de estratégias pode ajudar o professor na sua mediação.

4.2 A tarefa “Algarismos”

Dados os quadros abaixo, quantos números distintos de dois algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2 e 5?

No Quadro 2, são apresentadas fichas de algarismos que podem ser utilizadas na manipulação das tarefas.

Quadro 2: Fichas dos algarismos

1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
5	5	5	5	5	5	5	5

Fonte: Elaboração própria

Podemos classificar inicialmente a tarefa proposta como Arranjo; segundo Borba (2013), nesse tipo de problema, os elementos são escolhidos a partir de um único conjunto, mas, geralmente, a escolha realizada organiza grupos menores: são agrupamentos formados com p elementos de um conjunto de n elementos ($n > p$), nos quais a ordem de seus elementos faz diferença.

Se escolhermos dois elementos de um conjunto, podem ser geradas duas possibilidades diferentes, por causa da ordenação entre eles. No caso, ao escolher 1 e 2, podemos obter as possibilidades 12 e 21, que são diferentes. Para além dessa discussão, a repetição de elementos possibilita novas opções de números, com os

números 1 e 2, temos as possibilidades 11 e 22; portanto, esse problema é classificado como *arranjo com repetição*.

A mediação do professor inicia com a organização dos alunos em grupos, recortando as 24 fichas para compor números distintos de dois algarismos. O objetivo de apresentar um número maior de fichas do que é possível fazer os agrupamentos é para evitar induzir o aluno a utilizar apenas as peças disponíveis que garantam as possibilidades, sem verificar se há necessidade ou não de utilizar mais fichas. Ao verificar que algumas delas sobraram, os alunos poderão tentar fazer novas composições e irão perceber que, provavelmente, essas novas composições já terão sido feitas.

Após a manipulação do material, discute-se com os grupos os resultados encontrados e as estratégias que cada um deles utilizou para alcançá-los. No Quadro 3, apresentamos uma possível solução para o problema, utilizando uma tabela de dupla entrada.

Quadro 3: Número de possibilidades da tarefa “Algarismos” em tabela de dupla entrada

	1	2	5
1	11	12	15
2	21	22	25
5	51	52	55

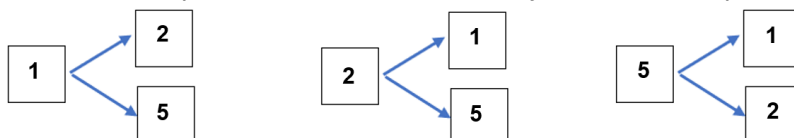
Fonte: Elaboração própria

Stein, Grover e Henningsen (1996, p.461) afirmam que as demandas cognitivas da tarefa incluem o raciocínio que implica sua resolução e variam desde a “memorização, ao uso de procedimentos e algoritmos [...], ao emprego de estratégias complexas de pensamento e raciocínio que seriam típicas de “fazer matemática””. Nesse sentido, o raciocínio combinatório requerido pela tarefa perpassa o reconhecimento da estrutura do problema de arranjo com repetição, dentre as quais destacamos a escolha, a ordenação e a repetição dos elementos do conjunto para formar as dezenas.

A estratégia utilizada de tabela de dupla entrada permite a coordenação entre os elementos do conjunto para a enumeração de todas as possibilidades. Caso seja ampliado gradativamente o número de elementos do conjunto, podemos conjecturar a solução como um produto $n \times n$, onde n representa a cardinalidade do conjunto inicial.

Pode-se, ainda, discutir pequenas mudanças no enunciado da tarefa que alterem o problema combinatório proposto. É possível, por exemplo, transformá-lo em um arranjo simples, basta alterar para: Quantos números diferentes de dois algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2 e 5? Na figura 2, apresentamos o número de possibilidades desse problema.

Figura 2: Número de possibilidades da tarefa arranjo em árvore de possibilidade



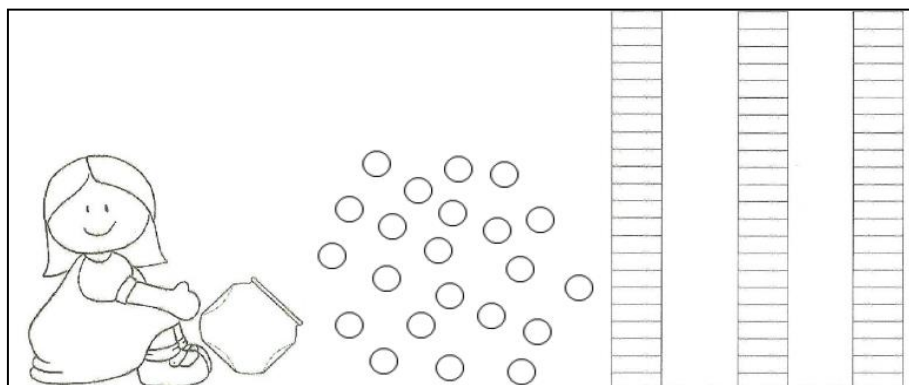
Fonte: Elaboração própria

4.3 A tarefa “Verdes, azuis e vermelhinhas”⁵

O livro *Verdes, azuis e vermelhinhas* (DIAS, 2009) conta a história de Belinha, uma menina que gosta de visitar o trabalho do papai, principalmente por causa de um pote cheio de bolas de várias cores (azuis, verdes e vermelhas) que ele guarda em cima do armário. Ela brinca e se diverte muito sozinha ou com os amigos do papai. Um dia, ao brincar, o pote de bolinhas tomba, fazendo com que todas se espalhem pelo chão da sala.

Para o desenvolvimento da tarefa — individualmente — cada aluno receberá uma folha com a atividade “Azuis, verdes e vermelhinhas” para pintar as bolinhas como quiserem, considerando as três cores. Depois de pintadas as bolinhas, os alunos deverão pintar as colunas, dispostas na Figura 3, considerando uma coluna para cada cor e as frequências correspondentes.

Figura 3: Modelo para a tarefa “Verdes, azuis e vermelhinhas”



Fonte: Souza (2013)

Para a exploração da estatística, é interessante que as quantidades de bolas

⁵ Adaptada de Souza (2013)

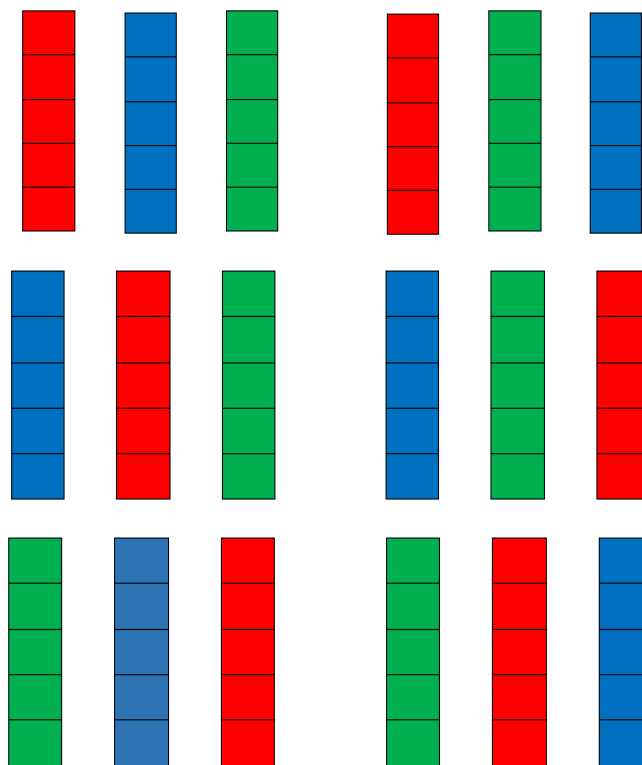
de cada cor sejam diferentes, produzindo, assim, distintas escalas nas colunas.

Com relação à combinatória, pede-se para os alunos quantificarem e identificarem os diferentes modos que podemos ordenar as colunas utilizando as cores azul, verde e vermelho das bolinhas, independentemente da quantidade de bolinhas de cada cor.

A tarefa proposta se caracteriza como Permutação, pois, segundo Borba (2013), os casos de permutação são tratados como casos particulares de arranjo, em que todos os elementos do conjunto dado são utilizados e todos os objetos são arranjados em ordens diferentes.

Bommel e Palmer (2018) indicam que alguns erros podem ser cometidos por crianças em problemas de permutação com uso de lápis e papel, principalmente em processos enumerativos, entre eles, as duplicidades de possibilidades e o uso de registros não estruturados, impedindo a comparação entre as possibilidades novas e as já encontradas. Desse modo, discussões sobre a sistematização de processos enumerativos podem ser utilizadas na mediação. A Figura 4 apresenta a enumeração dos resultados possíveis para a tarefa proposta.

Figura 4: Número de possibilidades da tarefa “Verdes, Azuis e Vermelhinhas” em desenho



Fonte: Elaboração própria

Nesse caso, observamos na Figura 4 seis possibilidades, no total. Esse número

de possibilidades proporciona uma variedade de estratégias enumerativas; nesse caso, verificamos o uso de uma estratégia enumerativa com a disposição de desenhos apresentada de maneira sistemática, fixando a primeira cor e alternando as demais. A discussão de um acréscimo de uma coluna de cor amarela pode ser aplicada pelo professor — e na situação proposta — o número de possibilidades ampliaria para 24, uma vez que a coluna pode ser colocada em quatro posições diferentes se escolhermos a primeira possibilidade, conforme se apresenta no Quadro 4.

Quadro 4: Número de possibilidades de posições ocupadas por uma quarta coluna

1º posição	2º posição	3º posição	4º posição
			

Fonte: Elaboração própria

Com base no disponibilizado no Quadro 4, podemos concluir que cada possibilidade apresentada na Figura 4 será alterada 4 vezes com o acréscimo proposto, resultando em 24 possibilidades. Acredita-se na importância da mediação do professor na proposição de complementações de situações para discussão de características da ordenação de possibilidades, inclusive na comparação das diferentes estratégias e nos diversos tipos de registros (palavras, símbolos, letras, números), a fim de oportunizar aos alunos a construção de estratégias enumerativas de resolução.

Consoante o exposto a partir da reflexão sobre a mediação do professor, acreditamos que questionamentos sobre possibilidades específicas podem ser realizados; exemplo: *quantas possibilidades terminam com vermelho? E quantas possuem o azul e vermelho separados? Ainda: quantas possuem azul e verde juntas?* Dessa maneira, algumas condições, como proximidade ou posição de elementos nos problemas combinatórios podem ser discutidos com os alunos do Ensino Fundamental.

Conforme apontam os estudos de Aquino (2010) e Almeida e Ferreira (2008), durante a resolução de problemas combinatórios, é indicada a participação mais ativa dos estudantes no processo de construção de estratégias de resolução de problemas combinatórios; portanto um dos caminhos pode ser a exposição das respostas e estratégias utilizadas, além de buscar a comunicação a fim de justificar as decisões tomadas, fomentando o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

4.4 A tarefa “Desejos”⁶

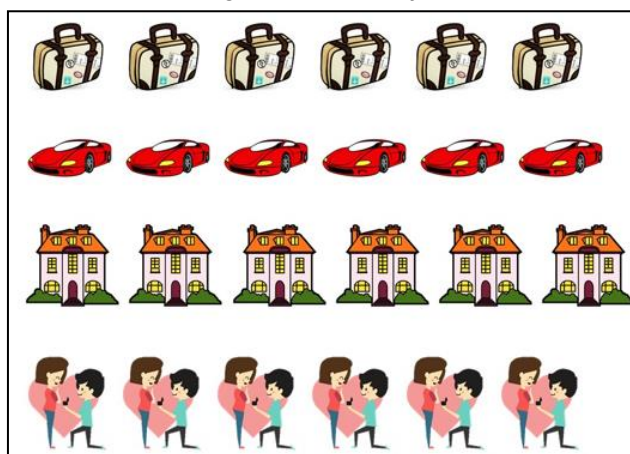
Um jovem garoto herda de sua avó uma lâmpada mágica de onde sai o gênio Crodmiro. O garoto pode pedir que sejam realizados apenas dois desejos para o gênio, porém ele deseja várias coisas. Os desejos do garoto são: carrão, casar com Lúcia, mansão e viajar muito. Sabendo que o gênio realizará apenas dois desejos, quais as combinações possíveis ele pode fazer para realizar os desejos do garoto?

Para a realização da atividade, serão necessários os seguintes materiais: imagens dos desejos para recorte; folha sulfite para registro; tesoura; lápis e borracha.

Trata-se de uma tarefa que aborda combinação, pois — segundo Borba (2013) — nos problemas de combinação, alguns elementos de um único conjunto são escolhidos e a ordem dessa escolha não constituem novas possibilidades. Em situações em que a ordem de grandeza é pequena, pode-se utilizar diferentes procedimentos de resolução, com contextos pertinentes, envolvendo diferentes tipos de problemas combinatórios.

Para o desenvolvimento, em grupos, os alunos recortarão as 24 imagens dos desejos para compor as combinações possíveis que o gênio pode fazer para realizar os desejos do garoto. O objetivo de trazer um número maior de imagens dos desejos (Figura 5) do que é possível combinar é para evitar induzir o aluno a utilizar apenas as peças disponíveis que garantam as combinações, sem verificar se há necessidade ou não de utilizar mais imagens. Ao verificar que algumas imagens sobraram, os alunos tentarão fazer novas composições e perceberão que, provavelmente, essas novas composições já terão sido feitas.

Figura 5: Os desejos

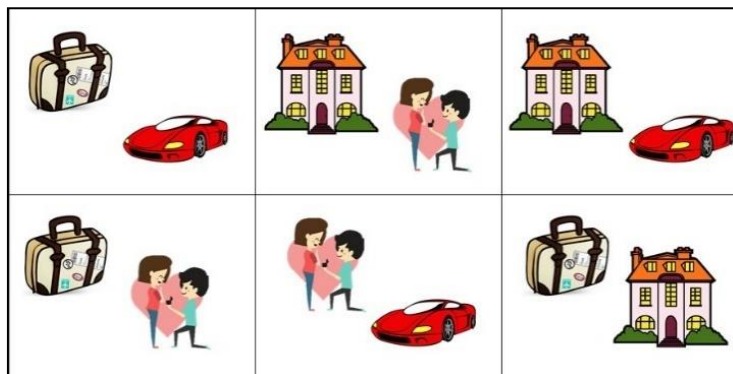


Fonte: Google imagens

⁶ Adaptado de <https://m3.ime.unicamp.br>

Após a manipulação do material, discutem-se com os grupos os resultados encontrados e as estratégias que cada um deles utilizou para alcançá-los. A figura 6 apresenta enumerações de possíveis resultados para a tarefa.

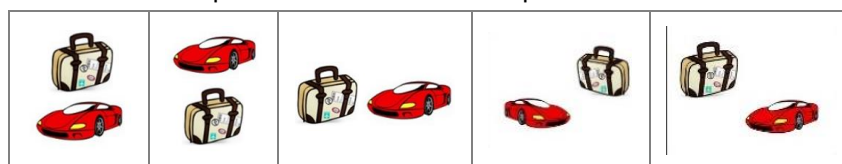
Figura 6: Apresentação do número de possibilidades da tarefa “Desejos” por meio de desenhos



Fonte: Elaboração própria

A estratégia de enumeração utilizou as figuras disponibilizadas para manipulação e disponibilizou seis possibilidades como solução para o problema. A manipulação das figuras permite, ainda, discutir como a ordem se apresenta no problema de combinação, não gerando novas possibilidades. Na Figura 7, observamos diferentes disposições com dois artefatos manipulativos da tarefa e indicamos que as cinco situações apresentadas representam a mesma possibilidade: viajar muito e carrão.

Figura 7: Diferentes disponibilidades de uma das possibilidades da tarefa “Desejos”



Fonte: Elaboração própria

Nesse sentido, também destacamos a mediação do professor como essencial no processo de compreensão de que — em problemas de combinação — as diferentes ordenações ou disposições dos objetos manipuláveis não produzem possibilidades diferentes, uma vez que é intuitivo que os estudantes pensem que são diferentes devido ao material utilizado.

5 A análise das tarefas

O trabalho aqui proposto tem como objetivo discutir as tarefas que contemplam o ensino de Combinatória tendo como base os PCNs (BRASIL, 1998) e principalmente a BNCC (BRASIL, 2017), explorando suas habilidades a fim de justificar a abordagem

dessa temática ao longo da Educação Básica.

A Combinatória, na maioria das vezes, pode ser definida como o estudo das combinações, arranjos e permutação segundo Morgado et al (1991). Porém, embora os problemas de arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano façam parte da Combinatória, são conceitos que permitem resolver um tipo de problema: os de contagem.

A BNCC (BRASIL, 2017) traz em seu documento habilidades que contemplam o ensino de problemas que envolvam contagem por meio de material manipulativo ou não e estratégias diversas; no entanto, trata do assunto de maneira geral, sem mencionar os tipos de problemas de contagem separadamente.

Embora o currículo da Educação Infantil ao Ensino Médio não contemple todos esses tipos de problemas combinatórios, há situações que exigem do aluno um conhecimento mais amplo para reconhecer os diferentes tipos, e a BNCC (BRASIL, 2017) deixa bem claro a importância de se trabalhar com essa temática —, de forma gradativa — durante toda a Educação Básica:

Os problemas de contagem, por exemplo, devem, inicialmente, estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos. (BRASIL, 2017, p. 271)

A contagem está presente na vida do aluno em muitos aspectos, desde a contagem de uma rotina a problemas mais complexos. Ela é uma habilidade essencial para todo o conhecimento numérico que pode trazer benefícios a outros conceitos matemáticos.

Rocha (2011) ressalta que trabalhar o processo de construção do raciocínio combinatório promove o desenvolvimento de organização de dados e escolhas em diversas situações do dia a dia constituindo um instrumento importante na formação da cidadania.

Assim, o papel da contagem é de extrema importância para o desenvolvimento do raciocínio matemático e, ao ser trabalhado desde os primeiros anos de escolaridade, pode facilitar a compreensão dos alunos nos anos subsequentes, sem serem meros aplicadores de fórmulas, pois as práticas no ensino de Combinatória,

muitas vezes, segundo Rocha (2011), é incentivada pelo uso abusivo de fórmulas, retirando o sentido das situações e apresentando apenas uma possível representação.

Com isso, as atividades aqui propostas para o 6º ano do Ensino Fundamental — mas que podem ser adequadas a outros anos — reforçam as diferentes estratégias que os alunos podem recorrer para resolverem situações sem a utilização de fórmulas, explorando seu raciocínio combinatório e seu desenvolvimento em relação aos problemas de contagem.

6 Considerações Finais

Neste trabalho, buscamos ressaltar a importância de se trabalhar a combinatória ao longo da Educação Básica. Apresentamos algumas tarefas que utilizam diferentes recursos, abordando os principais problemas de combinatória: produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação a partir de situações-problemas contextualizadas, as quais podem contribuir para os alunos compreenderem e atribuírem significado ao que estudam.

O estudo da Combinatória, segundo Gonçalves (2014), tem um foco maior a partir do Ensino Médio, o que acaba acarretando muitas dúvidas e dificuldades aos alunos por não terem um contato maior sobre o assunto nos anos anteriores. A BNCC (BRASIL, 2017) e os PCN (BRASIL, 1998) defendem que as abordagens de problemas de combinatória devem ser realizadas de forma gradativa, explorando diferentes estratégias utilizadas pelos alunos até a formalização do conteúdo e fórmulas no Ensino Médio, o que contribui para que o aluno reconheça os diferentes tipos de agrupamentos e qual deles utilizar, além de desenvolver o raciocínio combinatório para procedimentos básicos, como a organização de dados, classificação de eventos que são úteis não só em Matemática mas também em outros campos.

O presente estudo focou nas possibilidades de se trabalhar em sala de aula com a Combinatória e teve como objetivo propor situações que possam ser discutidas, colocadas em prática e adaptadas, a fim de auxiliar o aluno no seu momento de construção do conhecimento, utilizando ferramentas que estimulem, amparem e que — com a mediação do professor —, possam construir a formalização de conceitos de maneira mais rápida e prazerosa.

Referências

ALMEIDA, Adriana Luziê de; FERREIRA, Ana Cristina. Aprendendo Análise Combinatória através da resolução de problemas: um estudo com classes de 9º ano do Ensino Fundamental e 2º ano do Ensino Médio. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2008, Rio Claro. **Anais do XII EBRAPEM: Educação Matemática: Possibilidades de interlocução**. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista, 2008, p.1-20.

ARCANJO, Luís Valber Rios. **Proposta de jogos como estratégia de ensino para o estudo do Princípio Fundamental da Contagem no Ensino Fundamental**. 2015. 37 f. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática - PROFMAT) — Departamento de Matemática. Universidade Federal do Amapá. Macapá.

AQUINO, Claudivania de Alencar de. **Introduzindo o pensamento combinatório aos anos finais do Ensino Fundamental: uma proposta de ensino**. 2013. 78f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal do Vale do São Francisco. Juazeiro.

BALL, Deborah; FORZANI, Francesca. What Does it Take to Make a Teacher? **Phi Delta Kappan**, USA, v. 92, n. 2, p. 8-12, oct, 2010.

BOMMEL, J.; PALMÉR, H. Enhancing young children's understanding of a combinatorial task by using a duo of digital and physical artefacts. **Early Years an International Research Journal**. 2018, p.1-14.

BORBA, Rute. Vamos combinar, arranjar e permutar: Aprendendo Combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais do XI ENEM: Educação Matemática: retrospectivas e perspectivas**. Curitiba: Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2013, p.1-12.

BORBA, Rute; ROCHA, Cristiane de Arimatéa; AZEVEDO, Juliana. Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica. **Bolema. Boletim de Educação Matemática** (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 29, número especial, p. 1348-1368, 2015.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. — Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

CARDOSO, Evelyn Rosana; GUIRADO, João Cesar. Análise combinatória: da manipulação à formalização de conceitos. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática, 9., 27-29 set. 2007, Assis Chateaubriand. **Anais do EPREM**. Assis Chateaubriand: UNIMEO, 2007, p.1-19.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; JESUS, Cristina Cirino de. Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professoras que ensinam matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 20, n. 3, p. 751-764, 2014.

DIAS, Vera Lúcia. **Verdes, azuis e vermelhinhas**. Ilustrações: Romont Willy. São Paulo: Elementar, 2009.

GONÇALVES, Rafaela Ramos Soares. **Uma abordagem alternativa para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio**. 2014. 110f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) — Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro.

JESUS, Cristina Cirino de; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; OLIVEIRA, Hélia. Análise de tarefas cognitivamente desafiadoras em um processo de formação de professores de Matemática. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v.20, n.2, p. 21-46, 2018.

LOCKWOOD, E.; WASSERMAN, N. H.; TILLEMA, E. S. A case for combinatorics: A research commentary. **Journal of Mathematical Behavior**, Elsevier, Amsterdã, v. 59, p.1-14, 2020.

MORGADO, Augusto César; PITOMBEIRA DE CARVALHO, João Bosco; PINTO DE CARVALHO, Paulo Cezar; FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

NCTM. National Council of Teachers of Mathematics. **Professional standards for teaching mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1991.

PERRENOUD, Phlippe. **10 Competências para ensinar**. Porto Alegre, Artmed, 2000.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. **Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v.1, n.1, p.1-22, 2010.

PONTE, João Pedro da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática In: PONTE, João Pedro da (Org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa: Lisboa, 2014. p. 13-30.

ROCHA, Cristiane de Arimatéa. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios**: diversos olhares, diferentes conhecimentos. 2011. 191f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) — Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

ROCHA, Cristiane de Arimatéa; SOUZA, Antonio Carlos de. Conhecimento de crianças pequenas da Educação Infantil e alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental sobre Combinatória: O que apontam as pesquisas brasileiras no período de 2010 a 2019? **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 23, n.4., p. 452-484, 2021.

SCHMIDT, Wilian; MARIANI, Rita de Cássia Pistóia. Raciocínio combinatório: uma

meta-análise com ênfase nas Representações Semióticas. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 8, n. 3, p. 109—128, 2017.

SILVA, Monalisa Cardoso; PESSOA, Cristiane Azêvedo dos Santos. A Combinatória: Estado da Arte em Anais de Eventos Científicos Nacionais e Internacionais ocorridos no Brasil de 2009 a 2013. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n.4, p. 670-693, 2015.

SOUZA, Analucia Castro Pimenta de. **Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas**. 2010. 343f. Dissertação (Mestrado de Educação Matemática) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.

SOUZA, Antonio Carlos de. **O desenvolvimento profissional de Educadoras da Infância. Uma aproximação à Educação Estatística**. 2013. 220f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo.

STEIN, Mary Kay; GROVER, Barbara; HENNINGSEN, Marjorie. Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. **American Educational Research Journal** EUA, v. 33, n. 2, p. 455-488, Summer, 1996.

YEO, Joseph. **Mathematical tasks**: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment. 2007, 27f. Technical Report Me. Mathematics and Mathematics Education. National Institute of Education, Singapore.