eISSN 2179-426X 10.26843/rencima.v15n1a09
Recebido: 11/06/2022 ■ Aprovado: 25/01/2024 ■ Publicado: 01/02/2024

O problema do número presumido disposto no tratado de Līlavātī para o estudo do pensamento algébrico

Dianara Figueirêdo Freire[1]

Ana Carolina Costa Pereira[2]

Resumo: Na Educação Básica, vêm se discutindo modos de se aprimorar o ensino de álgebra, por meio da discussão do pensamento algébrico. Nesse contexto, o futuro professor de Matemática deve ter inserido, em sua formação, recursos que o ajudem a entender esse modo de pensar. Com isso, este artigo tem por intuito apresentar e discutir os conceitos algébricos com licenciandos em Matemática, contidos na parte "Um número presumido" do *Līlavātī*, com vista a orientações didáticas. Para isso, é utilizada uma abordagem qualitativa, de caráter descritivo, que se apoiou em um estudo de caso, permeado por um estudo bibliográfico e documental. Portanto, notamos que, através do tratado *Līlavātī*, é possível discutir o pensamento algébrico na Licenciatura em Matemática e, ainda, observamos que alguns licenciandos chegam à universidade com dificuldade de modelar problemas algébricos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Bhāskarācārya. Formação de Professores. Textos Históricos.

The problem of the assumed number provided in Līlavātī's treatise for the study of algebraic thinking

Abstract: In basic education, ways to improve the teaching of algebra have been discussed, through the discussion of algebraic thinking. In this context, the future Mathematics teacher must have included in their training resources that help them to understand this way of thinking. With this, this research aims to discuss the algebraic concepts with undergraduates in mathematics, contained in the "a presumed number" part of the Līlavātī, with a view to didactic guidelines. In this way, the article has a qualitative approach, being of a descriptive character, which was supported by a case study, permeated by a bibliographic and documentary study. Therefore, we note that through the Līlavātī treatise, it is possible to discuss algebraic thinking in the mathematics degree and we also observe that some undergraduates arrive at university with difficulty in modeling algebraic problems.

Keywords*:* Mathematics Education. Bhāskarācārya. Teacher Training. Historical Texts.

El problema del presunto número previsto en el tratado de Līlavātī para el estudio del pensamiento algebraico

Resumen**:** En la educación básica se han discutido formas de mejorar la enseñanza del álgebra, a través de la discusión del pensamiento algebraico. En este contexto, el futuro profesor de Matemáticas debe haber incluido en su formación recursos que le ayuden a comprender esta forma de pensar. Con eso, esta investigación tiene como objetivo discutir los conceptos algebraicos con estudiantes en formación en matemáticas, contenidos en la parte "un número presunto" del Līlavātī, con miras a orientaciones didácticas. De esta forma, el artículo tiene un enfoque cualitativo, siendo

[1] Instituto Federal de Educação – Ceará, Brasil. dianara.figueiredo@ufc.br https://orcid.org/0000-0002-5901-7478.

[2] Universidade Estadual do Ceará – Brasil. carolina.pereira@uece.br https://orcid.org/0000-0002-3819-2381.

de carácter descriptivo, el cual estuvo sustentado en un estudio de caso, permeado por un estudio bibliográfico y documental. Por lo tanto, notamos que a través del tratado Līlavātī, es posible discutir el pensamiento algebraico en la carrera de matemáticas y también observamos que algunos estudiantes llegan a la universidad con dificultad para modelar problemas algebraicos.

Palabras clave: Educación Matemática. Bhāskarācārya. Formación de Profesores. Textos Históricos.

1 Introdução

Pesquisadores vêm discutindo maneiras que possibilitem um melhor ensino/aprendizagem de Álgebra, pois alguns alunos têm dificuldade de assimilar a abstração que essa requer (Dalto e Buriasco, 2009). Dessa forma, professores ou mesmo futuros docentes necessitam refletir sobre essa área em suas formações, visto que o ensino da Álgebra é contemplado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), documento que rege atualmente o ensino no Brasil.

Na BNCC (Brasil, 2018), a Álgebra é apresentada tendo como finalidade o pensamento algébrico e, ainda, acrescenta-se a importância de construí-lo durante a vida acadêmica, alegando que

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento — pensamento algébrico — que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos (p. 270).

Desse modo, quando abordamos o pensamento algébrico, classificamo-lo “como uma forma de estruturação do pensamento — passível de ser desenvolvida desde a Educação Infantil, percorrendo toda a escolaridade — que pressupõe a generalização, transpondo situações particulares a ideias gerais” (Ferreira, 2017, p. 20-21). Assim, segundo Almeida e Câmara (2017), esse pensamento no ser humano é evidenciado por meio de cinco características, a saber: (1) estabelecer relações; (2) generalizar; (3) modelar; (4) operar com o desconhecido e (5) construir significado. Diante disso, há a necessidade de se discutir como ocorre a construção desse pensamento algébrico na formação inicial de professores, para que eles compreendam as diversas singularidades existentes nele.

Nesse contexto, são significativos momentos de experiência com atividades envolvendo o pensamento algébrico dos futuros professores de Matemática, pois os licenciandos chegarão à sala de aula municiados de recursos para construir momentos de aprendizagem da Álgebra com seus futuros alunos da Educação Básica. Visto que "a capacidade de abstração e generalização é uma ferramenta adquirida por meio do estudo da álgebra. Todavia, dependendo da ênfase que os professores dão ao seu ensino, acontecem falhas no desenvolvimento dessa habilidade" (Kunh e Lima, 2021, p. 18-19).

Logo, um campo que vem possibilitando novos recursos para o ensino de Matemática é a História da Matemática, que vem promovendo um diálogo na formação de professores, com o intuito de discutir ações e produções que propiciem a interface entre a história e o ensino de Matemática. Nessa perspectiva, a história fornece meios que podem ser utilizados para potencializar os saberes sobre a construção do conhecimento matemático.

Dentre muitos objetos da História da Matemática que estão vinculados ao pensamento algébrico, encontramos o tratado histórico hindu conhecido como *Līlavātī*, escrito no século XII, pelo estudioso das Matemáticas Bhāskarācārya, chamado também de Bhaskara II, que traz em seu corpo textual regras e problemas que podem vir a contribuir com o ensino de Álgebra.

Nessa conjuntura, é importante ressaltar que a versão original do tratado não está disponível, porque sua versão original, até o momento, não foi encontrada. No entanto, traduções podem ser achadas em bibliotecas e livrarias, dentre elas, para este trabalho, utilizamos: *Lilawati: or a treatise on Arithmetic and Geometry,* uma versão inglesa feita por John Taylor, publicada em 1816. Dessa forma, o artigo tem como propósito apresentar e discutir os conceitos algébricos contidos na parte "Um número presumido" do *Līlavātī,* aplicados com licenciandos em Matemática, da Universidade Estadual do Ceará (UECE).

O artigo tem uma abordagem qualitativa, de caráter descritivo, que se apoiou em um estudo de caso, visto que é utilizado "quando se quer estudar algo singular, que tenha um valor em si mesmo" (Fiorentini e Lorenzato, 2006, p. 110), sendo então desenvolvido com 9 estudantes da turma de História da Matemática, do curso de Licenciatura em Matemática, da UECE.

Portanto, ao longo do artigo, são mostrados alguns aspectos contextuais da vida de Bhāskarācārya e de seu livro *Līlavātī*, sendo descritas as regras e os problemas relacionados ao conteúdo do número presumido. Por fim, são apresentadas algumas considerações didáticas para o uso do material na Educação

Básica para a disciplina de Matemática.

2 Bhāskarācārya (?1114 - ?1185) e o *Līlavātī*

Bhāskarācārya ou Bhaskara II foi um astrônomo e astrólogo hindu. Taylor (1816) afirma que ele nasceu em Biddur, uma cidade no Deccan, no ano de 1036, Salivahana (Śaka), que corresponde ao ano 1114 da era cristã. Já Eves (2011) menciona que ele viveu em Ujjain, localizada na região norte da Índia e morreu em 1185. Entretanto, o próprio Bhāskarācārya descreve, no último capítulo do livro Golādhyāya, que "ele pertencia à linhagem Śāndilya e que viveu em Vijjalavida" (Patwardhan, Naimpally e Singh, 2006, p. 16).

Embora não se saiba com precisão o local onde Bhāskarācārya viveu, ele escreveu diversos trabalhos voltados para a área de Astronomia e de Matemática, sendo o mais conhecido um compilado de obras intitulado *Siddhāntaśiromani*, escrito aos 36 anos. Patwardhan, Naimpally e Singh (2006) comentam que essa obra está dividida em quatro partes: (1) *Līlavātī*, (2) *Bījaganita*, (3) *Golādhyāya*, (4) *Gaṇitādhyāya,* em que a primeira aborda conceitos de Aritmética, a segunda de Álgebra, a terceira se refere aos Movimentos Planetários e a quarta trata da Astronomia[3].

O livro *Līlavātī* é considerado como uma introdução aos assuntos de Astronomia, dedicando sua maior parte ao estudo da Aritmética, mas outras áreas do conhecimento também podem ser encontradas, como Álgebra, Trigonometria e Geometria. Alguns livros de História da Matemática (Boyer, 2015; Joseph, 2016; Eves, 2011) contam uma lenda sobre a justificativa envolvendo a escrita do texto e do seu título. Segundo Boyer (2015),

> o nome do título é o da filha de Bhaskara que, segundo a lenda, perdeu a oportunidade de se casar por causa da confiança de seu pai em suas predições astrológicas. Bhaskara tinha calculado que sua filha só poderia se casar de modo propício em uma hora determinada de um dia dado. No dia que deveria ser o de seu casamento, a jovem ansiosa estava debruçada sobre o relógio de água quando se aproximava a hora do casamento, quando uma pérola em seu cabelo caiu, sem ser observada, e deteve o fluxo de água. Antes que o acidente fosse notado, a hora propícia passara. Para consolar a infeliz moça, o pai deu seu nome ao livro que estamos descrevendo (p.161).

Embora essa lenda seja encontrada em diversos livros didáticos, paradidáticos

[3] Detalhes sobre os três últimos livros podem ser encontrados em Freire e Pereira (2022).

e de História da Matemática, não se tem certeza se é verídica. Em relação à tradução que é base deste trabalho: *Lilawati: or a treatise on Arithmetic and Geometry*, publicada em 1816, ela está dividida em 4 partes, que podem ser contempladas no quadro a seguir,

Quadro 1: Conteúdo de *Līlavātī* na versão de Taylor (1816)

PARTE	CONTEÚDO
I	(1) Tabelas de dinheiro, pesos etc.; (2) Adição e Subtração; (3) Multiplicação; (4) Divisão; (5) O quadrado; (6) Raiz quadrada; (7) Cubo; (8) Raiz cúbica; (9) Frações; (10) O Efeito da Cifra; (11) Inversão; (12) Um número presumido; (13) Multiplicador da Raiz; (14) Regra das três quantidades; (15) Regras de Cinco etc. quantidades; (16) Regra de trocas; (17) Quantidades mistas; (18) Comprando e vendendo; (19) Computando ouro; (20) Permutação; (21) Progressão.
II	CAPÍTULO I: Operações Geométricas. CAPÍTULO II: Seção I – Dos círculos; Seção II – De libras; Seção III – Dos tijolos ou pedras em parede; Seção IV – Do Corte de madeiras etc.; Seção V – De montes; Seção VI – Das sombras.
III	Seção I – Do *Kutaka*; Seção II - Do *Sthira* ou *Kutaka* Fixo; Seção III – Do *Sanslista Kutaka*.
IV	Das transposições; Apêndice.

Fonte: Adaptado de Taylor (1816)

Por meio do quadro, é perceptível a quantidade de conceitos que Bhāskarācārya deixou registrado. Com isso, destacamos o fato de o tratado *Līlavātī* ter sido utilizado por muitos anos nas escolas indianas, sendo essa afirmação confirmada por Patwardhan, Naimpally e Singh (2006, p. 6, tradução nossa), que ressaltam que *Līlavātī* "foi usado na Índia como livro didático por muitos séculos. Ainda agora, ele está sendo usado em escolas de sânscrito em alguns estados". Refletindo, assim, a importância acadêmica e histórica desse tratado, principalmente, como forma de conservar o conhecimento de uma determinada época.

Destarte, com o estudo de *Līlavātī*, percebemos que ele é composto de diversas definições, métodos matemáticos e 119 problemas envolvendo aplicações do conteúdo proposto, abrangendo uma Matemática prática, que ensina o saber/fazer. O livro não contém demonstrações, indicando um público-alvo mais geral (I. Silva, J. Silva e Pereira, 2018). Dessa maneira, o tratado expõe uma diversidade de conteúdos, com formas de resoluções indianas, que podem ser readaptadas ao contexto escolar, entre as quais podemos citar como exemplo as frações, a regra de três, as raízes, os círculos, entre muitos outros.

3 O problema do "Um Número Presumido" em *Līlavātī*

Um número presumido, que é uma quantidade falsa utilizada em um problema para encontrar um número desconhecido, encontra-se na primeira parte do tratado *Līlavātī*, sendo o décimo segundo conceito a ser apresentado na versão de 1816, traduzia por John Taylor. Esse texto vem subdividido em sete tópicos, intitulados: (1) número assumido; (2) onde uma certa quantidade é conhecida; (3) onde estão os restos; (4) onde existe uma diferença; (5) quando existe soma e a diferença; (6) quando existe a diferença de quadrados; (7) a respeitos de quadrados.

Conforme já mencionado, neste artigo, deter-nos-emos nas partes (1) e (2), nas quais *Bhāskarācārya*, inicialmente, expõe uma regra, que tem por intuito encontrar um número desconhecido usando um número presumido: "Multiplique, divida, subtraia ou some um número presumido as frações, de acordo com as condições da questão: pelo resultado divida o produto do número conhecido pelo presumido. O quociente será o número necessário" (Taylor, 1816, p. 32, tradução nossa).

No enunciado da regra, *Bhāskarācārya* (1816) apresenta quatro valores, ou seja, o número presumido (p), as frações (f), o resultado (r) e o número conhecido (c)[4]. Nesse sentido, o primeiro passo é multiplicar, dividir, subtrair ou somar o número presumido (p) pelas frações (f), sendo apresentada a operação que será efetuada no enunciado do problema proposto, obtendo-se, assim, o resultado (r). Algebricamente, temos:

$$p \times f = r, ou\; p \div f = r, ou\; p - f = r, ou\; p + f = r.$$

Em seguida, é efetuada a divisão do resultado adquirido do produto do número presumido (p) pelo número conhecido (c), pelo resultado (r), isto é,

$$\frac{p \times c}{r}.$$

Dessa maneira, o resultado desse cálculo será o número desconhecido procurado. Ressaltamos que o número presumido, na regra, pode ser escolhido de forma aleatória pelo usuário.

Após o enunciado da regra, *Bhāskarācārya* (1816) traz um problema contextualizado com elementos hindus do século XII: "um terço de uma coleção de belos nenúfares é oferecido a *Mahadev,* um quinto a *Huri*, um sexto ao Sol, um quarto a *Devi*, e seis restantes são apresentados ao professor espiritual. Qual o número

[4] Será utilizada a notação matemática moderna para melhor compreensão do leitor.

inteiro de nenúfares?” (Taylor, 1816, p. 33).

Para a solução do problema, partindo das orientações contidas na regra, escolhemos, de forma intencional, o número presumido igual a 60, pois percebemos que os denominadores das frações propostas no problema possuíam o múltiplo comum igual a 60 e isso facilitaria os cálculos futuros. Entretanto, não é mencionado, na regra, particularidade dessa natureza, deixando livre para o usuário a escolha do número presumido. A seguir, são apresentadas as frações:

Tabela 1: Frações contidas no problema de *Līlavātī*

Coleção de Belos Nenúfares[5]	Representação da Fração
Mahadev	1/3
Huri	1/5
Sol	1/6
Devi	¼

Fonte: Retirado de *Bhāskarācārya* (1816, p. 33).

Além do número conhecido 6, referente ao restante da coleção de belos nenúfares que são apresentados ao professor espiritual.

Por isso, segundo a orientação de *Bhāskarācārya* (1816), o primeiro passo é multiplicar, dividir, subtrair ou somar o número presumido pelas frações. Contudo, o problema proposto não traz apenas uma fração, mas diversas frações relacionadas com o número pretendido. Dessa forma, precisamos encontrar a fração que representa o todo no problema. Na Tabela 1, cada parte da coleção de nenúfares é oferecida a um Deus hindu. Logo, se escolhemos 60 como o número desconhecido, que é a quantidade total de nenúfares contida na coleção, cada fração se refere a uma parte do todo que o Deus receberá, ou seja,

$$\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$$
$$\frac{1}{5} \cdot 60 = 12$$
$$\frac{1}{6} \cdot 60 = 10$$
$$\frac{1}{4} \cdot 60 = 15$$

Portanto, o resultado das frações é dado por $20 + 12 + 10 + 15$, isto é, 57, que

[5] Nenúfar (Nymphaea odorata). A flor bastante odorífera desta espécie possui numerosas pétalas e estames, sendo regular, isto é, com simetria actinomorfa. O gênero Nymphaea é amplamente distribuído nas regiões tropicais e temperadas de todo o mundo (Lucena, Medeiros e Mendes, 2015. p. 26).

representa o (f). Subtraindo o número presumido (p) pelo resultado das frações (f), temos:

$$60 - 57 = 3$$

Desse modo, temos que o resultado (r) é igual a 3.

Seguindo a orientação de *Bhāskarācārya* (1816), agora efetuamos o produto do número presumido (p = 60) pelo número conhecido (c = 6) e dividimos pelo resultado (r = 3), ou seja,

$$\frac{p \times c}{r} = \frac{60 \times 6}{3} = \frac{360}{3} = 120$$

Nesse contexto, o número inteiro de nenúfares é 120, ou melhor, o valor requerido do problema.

4 Lócus e sujeitos de aplicação da atividade histórica

Os cursos de Licenciatura em Matemática são laboratórios de práticas, que permitem experimentar recursos didáticos em diferentes contextos da sala de aula. Dentre as disciplinas ofertadas na Universidade Estadual do Ceará (UECE), a História da Matemática está situada no sexto semestre, com carga horária de 68 horas-aulas e tem como ementa as seguintes temáticas,

> a Pesquisa em História da Matemática. Historiografia da Ciência e da Matemática. Matemática na Antiguidade: Babilônia, Mesopotâmia, Egito e Grécia. A Matemática no Mundo Árabe e Europa Medieval. A Matemática nos séculos XVI e XVII. Introdução à História do Pensamento Infinitesimal. A Matemática no século XIX. Relações entre História da Matemática e Educação Matemática. História da Matemática em Portugal e no Brasil (Ceará, 2018, s/p).

Como uma forma de agregar discussões à temática de História da Matemática e Educação Matemática, foi desenvolvida uma atividade a partir de um excerto do texto de *Līlavātī* para ser aplicada na turma do semestre de 2021.1[6] no período noturno. A turma possuía, inicialmente, 40 alunos matriculados, entretanto, apenas 17 frequentaram a disciplina. Devido ao cenário pandêmico da Covid-19, o planejamento e a execução da disciplina foram realizados remotamente, tendo como ferramenta didática as plataformas *Google Meet* e *Zoom,* grupo de *WhatsApp* e e-mail.

[6] Devido a greves e à pandemia da COVID-19, o semestre de 2021.1 ocorreu de setembro/2021 a fevereiro/2022, na Universidade Estadual do Ceará.

Dessa maneira, a proposta de atividade envolvendo um dos problemas contidos no tratado de *Bhāskarācārya, Līlavātī*, ocorreu no final do semestre, no período de 15 de janeiro a 15 de fevereiro de 2022, sendo que o envio era opcional. Ao todo, recebemos apenas 6 devolutivas: Dupla A, Dupla B, Dupla C, Participante D, Participante E e Participante F.

5 A atividade

A atividade proposta está baseada na investigação histórica matemática defendida por Mendes (2010, p. 39), na qual "o modelo didático apoiado na investigação histórica pressupõe a participação efetiva do aluno na construção de seu conhecimento em sala de aula com o aspecto preponderante nesse procedimento didático".

Portanto, a atividade aplicada consistia na tradução; na compreensão; na solução partindo-se dos conhecimentos do século XII e atualmente; na comparação (passado e presente) e na discussão didática de um dos problemas e de sua regra de solução, que envolve o número presumido, situado no tópico 12 da parte 1, nas páginas 32 e 33, do texto de *Līlavātī,* versão de 1816, traduzida por John Taylor.

A regra e o problema aplicado foram apresentados na sessão anterior, que versava sobre encontrar um número desconhecido, sendo dada uma quantidade conhecida. Sendo assim, a proposta seguia a orientação:

Leia o texto a seguir, retirado do tratado *Līlavātī*, de *Bhāskarācārya.*

Regra: *Multiply or divide an assumed number, and subtract or add the fractions, according to the conditions of the question: by the result divide the product of the known number by the assumed. The quotient will be the number required* (Taylor, 1816, p. 32). Problema: *One third of a collection of beautiful water-lilies is offered to Mahadev, one fifth to Huri, one sixth to the Sun, one fourth to Devi, and six which remain are presented to the spiritual teacher. Required the whole number of water- lilies?* (Taylor, 1816, p. 33).

A partir do texto acima, vocês devem:

1. Traduzir a regra e o problema, observando como se dará o processo de resolução que *Bhāskarācārya* propôs para esse tipo de produto.
2. Resolver o problema a partir das orientações de *Bhāskarācārya*, explicando os

passos de solução. Evite a utilização de conceitos matemáticos fora da orientação apresentada.
3. Identificar os conteúdos matemáticos que envolvem o problema.
4. Resolver a solução com nossa matemática atual.
5. Comparar as duas soluções (similaridades, diferenças etc.).

A entrega da atividade foi via formulário do *Google Forms*, cujos discentes poderiam enviar como um arquivo do *Word* ou digitalizar sua escrita através da resolução no caderno. O prazo dado para a realização da atividade foi de 15 dias. Adiante, apresentaremos a descrição dos resultados por meio dos dados coletados.

6 Discussão dos dados coletados

A primeira questão estava pautada em "Traduzir a regra e o problema, observando como se dará o processo de resolução que *Bhāskarācārya* propôs para esse tipo de produto". O propósito era que eles vivenciassem como são feitas as traduções e o tratamento didático de um texto histórico e percebessem que cada tradução é uma interpretação do autor/tradutor, isso se reportando à tradição hermenêutica[7] (Eco, 2007).

Nessa questão, todos os seis participantes entregaram uma versão da tradução. No entanto, foi possível averiguar que eles utilizaram recurso de tradução disponível na internet sem fazer as devidas correções. Isso é evidenciado no Participante D, que, em sua tradução relacionada à regra, não observou impropriedades:

Quadro 2: Resposta assertiva da questão 2

Tradução do Participante D	Multiplique ou divida um número assumido, e subtraia ou some as frações de acordo com as condições da questão
Tradução correta	Multiplique, divida, subtraia ou some um número presumido às frações, de acordo com as condições da questão

Fonte: Dados da Pesquisa (2022).

Tal fato acarretará erros conceituais desse participante no desenvolvimento da solução do problema, via texto histórico.

Na segunda questão, os participantes foram orientados a "resolver o problema a partir das orientações de *Bhāskarācārya*, explicando os passos de solução".

Colocou-se uma observação na questão para que evitassem a utilização de

[7] Segundo o Dicionário Didático de Língua Portuguesa (Ramos, 2011, p. 439) a hermenêutica é uma "Ciência ou técnica de interpretar textos, especialmente se forem sagrados ou filosóficos".

conceitos matemáticos fora do contexto. Nessa questão, a Dupla A, a Dupla C e o Participante F conseguiram mostrar uma solução pelo algoritmo apresentado no problema (Quadro 3).

Quadro 3: Respostas assertivas da questão 2

Dupla A	Fazendo a soma das frações: 1/3 + 1/5 + 1/6 + 1/4 = 57/60 Subtraindo o número assumido:1 – 57/60 = 3/60 Multiplicando o número assumido pelo número conhecido: 1 . 6 = 6 Dividindo pelo resultado: 6 : 3/60 = 120
Dupla C	Passo 1: Presumimos que o número de lírios d'água é 1. Passo 2: A quantidade de lírios d'água que já conhecemos é 6. Passo 3: Pela condição do problema vamos somar as frações: Quantidade restante $= 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) = 1 - \left(\frac{20+12+10+15}{60}\right) = 1 - \frac{57}{60} = \frac{1}{20}$. Passo 4: Vamos dividir o produto do número presumido pelo número conhecido, neste caso 6, pelo resultado do passo 3: $\frac{6 \times 1}{\frac{1}{20}}$.
Participante F	1º) soma das frações: (1/3) + (1/5) + (1/6) + (1/4) = 57/60 2º) subtração do número assumido: 1- (57/60) = (60/60) - (57/60) = (3/60) 3º) produto entre o número assumido e o número conhecido 1 * 6 = 6 4º) divisão entre o produto anterior e o número assumido 6/(3/60) = (6*60/3) = (360/3) = 120

Fonte: Dados da Pesquisa (2022).

Ao observar as três soluções expostas, podemos perceber que eles seguiram o algoritmo proposto por *Bhāskarācārya.* Entretanto, a Dupla A e o Participante F não trouxeram os passos realizados nas "contas secundárias", como a soma e a subtração de frações. Já a Dupla C, embora não apresente de forma explícita, utilizou o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) de 3, 5, 6 e 4, que é 60. Todavia, é importante ressaltarmos que a utilização do MMC para resolver a soma e a subtração de frações não é orientada por *Bhāskarācārya* na regra de solução de seu problema.

No caso dos demais, Dupla B, Participante D e Participante E não obtiveram êxito na solução. Quanto à Dupla B, acreditamos na incompreensão da questão, pois a solução estava direcionada a uma explicação genérica do problema:

> *Seguindo as orientações de Bhaskaracarya sabemos que para que se possa resolver o problema proposto primeiramente foi necessário que ele dividisse por um número assumido, logo depois ele somou as frações e pelo resultado dividido o produto do número conhecido pelo assumido (Dupla B, 2022).*

Por sua vez, os discentes D e E apresentaram inconsistências em suas resoluções, como podemos ver a seguir:

Será resolvido de trás para frente, como foi oferecido para Devi 1/4, daí sabemos que 6 lírios de água restantes é 3/4. Dividimos 6 por 3 e teremos o resultado 2(1/4 que foi oferecido a Davi), somamos com 6 e teremos o resultado 8, usando a mesma lógica, 1/6 foi oferecido à Sol, sabemos que 8 é 5/6 dividimos assim 8 por 5 e teremos o resultado 1,6(1/6 que foi oferecido à Sol), somamos com 8 e teremos o resultado 9,6. 1/5 foi oferecido à Huri sabemos que 9,6 é 4/5 dessa quantia, dividimos assim 9,6 por 4 e teremos o resultado 2,4(1/5 que foi oferecido à Huri), somamos com 9,6 e teremos o resultado 12, 1/3 foi oferecido à Mahadev, sabemos que 12 é 2/3 dessa quantia então dividimos 12 por 2 e teremos o resultado 6(1/3 que foi oferecido à Mahadev), somamos com 12 e teremos assim o resultado 18 que é o valor da quantidade de lírios de água ao todo (Discente E, 2022).

Presumi o número 10. Multipliquei esse número presumido por 5. Resultado: 50. A soma das frações são 1/3 + 1/5 + 1/6 + 1/4 + 6/1 = 417/60. Fazendo a divisão 6,95. Divisão do produto e do número presumido: 50: 10 = 5. Resultado deu 5 (Discente D, 2022).

Nessa perspectiva, percebemos que o discente E atribuiu o número 6 como sendo o total, ou seja, o número procurado na questão, ele subtrai as frações deste, não compreendendo que o 6 é somente uma parte do desconhecido. Já o discente D, provavelmente, por causa da incompreensão da regra, multiplicou primeiro, seguindo os passos da sua tradução, que pode ser observada no Quadro 2.

Com isso, não queremos mostrar o desacerto dos participantes, mas sim discutir a importância de uma tradução e de sua compreensão em meio ao seu contexto, pois, pelo costume de utilizarmos ferramentas que facilitam a tradução, podemos interpretar o texto erroneamente. Desse modo, essa conjuntura nos faz refletir sobre a relevância de fazer o tratamento didático antes de entregar o texto histórico aos graduandos, visto que isso pode minimizar essas incompreensões.

A terceira questão estava pautada em os participantes tentarem "identificar o conteúdo matemático que o problema envolve", exposto na regra e no problema.

Quadro 4: Respostas assertivas da questão 3

Dupla A	Operações com números fracionários e inteiros.
Dupla B	Frações, Mínimo Múltiplo Comum - MMC, Soma dos Números com incógnita.
Dupla C	Soma, subtração, multiplicação e divisão.
Participante D	Divisão, multiplicação, soma de frações.
Participante E	Álgebra e Aritmética.
Participante F	Adição, subtração, multiplicação e divisão com frações e mínimo múltiplo comum para operar as frações.

Fonte: Dados da Pesquisa (2022).

Embora a questão pedisse para eles elencarem o conteúdo matemático presente na regra e na solução, o Participante E associou a área da Matemática à qual esses conteúdos estão relacionados, mostrando, assim, a sua incompreensão cognitiva. Os demais associaram, em sua maioria, a conceitos envolvendo as operações com frações, ou seja, adição, subtração, multiplicação e divisão de frações.

Outra observação necessária é a relação da questão com o Mínimo Múltiplo Comum para operar as frações. Na orientação de *Bhāskarācārya*, não foi mencionada a "regra" do MMC, mas os participantes listaram como um conteúdo matemático. Contudo, a Dupla B associou a "Soma dos Números com incógnita", o que pode ser um *insight* para um possível direcionamento ao pensamento algébrico.

A quarta questão pedia que os participantes tentassem "Resolver a solução com nossa matemática atual". Nesse sentido, os Participantes D e E não responderam corretamente, mostrando a incompreensão do enunciado e/ou a falha na tradução assertiva da regra e da solução do problema. Já as Duplas A, B e os Participantes E, F utilizaram a mesma estratégia para resolver o problema: utilizaram a incógnita x para o termo desconhecido, porém o processo matemático permaneceu similar à proposta de *Bhāskarācārya* (Figura 2).

Na Figura 2, podemos observar o pensamento algébrico sendo desenvolvido, os participantes precisavam trabalhar com o desconhecido, raciocinando que a soma de todas as frações do desconhecido era igual ao resultado desconhecido menos a quantidade conhecida. Dessa forma, ao resolver a equação do primeiro grau, o aluno encontraria o número inteiro de nenúfares.

Figura 2: Resolução da questão 4 da Dupla C

Usando os conceitos atuais, seríamos levados a utilizar uma equação:

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}x + 6$$

O mais indicado seria multiplicar os dois lados da equação por um número conveniente afim de eliminar as frações, neste caso esse número seria o MMC de 3, 4, 5 e 6, que é 60. Resultando no mesmo valor encontrado na questão 2:

$$x \cdot 60 = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}x + 6\right) \cdot 60$$

$$60x = 20x + 12x + 10x + 15x + 360$$

$$60x = 57x + 360$$

$$3x = 360$$

$$x = \frac{360}{3} = 120$$

Fonte: Acervo da pesquisa (2022).

Por fim, a questão cinco pedia para "comparar as duas soluções (similaridades, diferenças etc.)". O Quadro 5 aponta algumas conclusões:

Quadro 5: Similaridades e diferenças apontadas pelos participantes

Participantes	Similaridades	Diferenças

Dupla A	Utiliza adição e divisão de frações.	• Na solução de Bhāskarācārya não utiliza a forma irredutível das frações. • Na solução atual podemos usar a lei do cancelamento e a forma irredutível das frações.
Dupla B	As incógnitas, as somas, as divisões.	A lógica de ser resolvida e pensada, e o uso de MMC na resolução atual.
Dupla C	Operações com fração: Adição, Subtração, multiplicação e divisão.	O número presumido e a incógnita x.
Participante D	Operações com frações, multiplicação e divisão.	Subtração.
Participante E	-	-
Participante F	Uso das quatro operações básicas e das frações.	Uso de apenas aritmética para chegar à solução. Uso da incógnita para chegar à solução.

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

O objetivo dessa questão era fazer com que os alunos percebessem que o pensamento algébrico permeia todo o processo da regra e da solução de *Bhāskarācārya,* pois eles estão lidando com o desconhecido, sendo sua mente condicionada a atribuir significado a esse problema, para então buscar uma maneira de representar esse desconhecido e, finalmente, encontrá-lo*.*

No Quadro 5, as respostas indicam que as similaridades estão associadas às operações envolvendo as frações, o que, na visão dos participantes, estão mais direcionadas aos conceitos aritméticos. Já as diferenças, dentre as várias respostas, "*uso da incógnita para chegar à solução*" (Participante F, 2022), estão associadas ao pensamento algébrico.

Outra diferença observada, ainda pelo Participante F, que contempla uma das principais diferenças existentes entre as duas soluções, é o uso somente da Aritmética na regra de *Bhāskarācārya*, a qual podemos, através da nossa simbologia algébrica, respondê-la também por uma equação do primeiro grau, fazendo uso de métodos da Álgebra atual. A seguir, o Participante F (2022) complementa sua resposta:

> *Na solução baseada na proposta de Bhaskaracarya, utilizamos de um número presumido como suposta solução, que foi o 1, e subtraímos as quantidades fracionárias citadas de valor. Já na solução pensada com a Matemática atual, assumimos o valor de lírios d'água como uma incógnita x, valor que descobrimos somando as frações dessa incógnita com o único valor real citado (no caso, o 6). Essa diferença se deu pelo fato de que na regra de proposta não citava o conceito matemático da equação.*

Por último, percebemos que outros conceitos podem ser explorados ao se utilizar esse texto histórico. Sendo um deles o pensamento algébrico dos licenciandos em Matemática, que pode ser vislumbrado tanto nas respostas dos alunos quanto na algebrização da regra na seção 2.

É relevante comentar que o professor, nessa atividade, não interferiu na condução da resolução, todavia, em uma sala de aula convencional, o papel docente dentro da atividade é interessante, visto que ele pode mediar reflexões sobre o pensamento algébrico, partindo das interpretações dos alunos, mostrando a importância da relação professor-aluno na construção da aprendizagem.

7 Considerações didáticas sobre o problema e o ensino de Álgebra

A BNCC (Brasil, 2018) traz o pensamento algébrico na unidade temática Álgebra, devendo o mesmo ser construído no Ensino Fundamental. De acordo com esse documento, o aluno deve adquirir a capacidade de lidar com o desconhecido, reconhecer padrões e generalizá-los etc. Assim, Kuhn e Lima (2021) reforçam que,

> diante da proposta da BNCC (Brasil, 2018) para o ensino de álgebra, torna-se relevante fazer referência à maneira como o estudante constrói o conhecimento algébrico, presente em situações como observação de regularidades, compreensão de tabelas e gráficos e resolução de situações problemas. E a álgebra é a principal aliada no desenvolvimento do pensamento hipotético-dedutivo, através da manipulação de equações e não, puramente, da sua resolução mecânica (p. 9).

Desse modo, o professor de Matemática deve ter, em sua formação, elementos que deem condições a ele de explorar essa forma de pensar, para então levar para os alunos da Educação Básica. Logo, corroboramos com Ribeiro (2016), ao mencionar que

> entendemos ser necessário pensar uma formação inicial (e mesmo continuada) que tome conceitos da Álgebra da Educação Básica, como os de equação, função, número, para discuti-los à luz da prática dos professores que ensinam na escola elementar [...] (p. 13).

Destarte, a atividade apresentada, neste artigo, foi direcionada para alunos da Licenciatura em Matemática, da UECE, que cursavam a disciplina de História da Matemática. Tendo por intuito a percepção de como o pensamento algébrico emerge na formação de professores de Matemática, partindo de um texto histórico, que se encontra em *Līlavātī*.

Através da atividade, notamos que o problema de *Līlavātī*, o número presumido, é de uma resolução simples, quando se trabalha com conceitos atuais da Matemática. Conforme exposto pelos alunos, foram utilizados os conteúdos de adição, subtração, divisão e multiplicação de frações, MMC e equação do primeiro grau, que são temas frequentemente estudados na Educação Básica e este último é contemplado na unidade temática Álgebra, na BNCC.

Acrescenta-se, ainda, que o problema e a solução propostos por *Bhāskarācārya* não são comuns ao cotidiano escolar dos discentes, colaborando para a discussão de novos métodos de solução para a equação do primeiro grau, diferente dos usuais na sala de aula. Portanto, percebemos que textos como esse são recursos que podem levar essa discussão de pensamento algébrico para a graduação e potencializar o ensino de Álgebra.

8 Notas finais

Com o desenrolar deste artigo, percebemos que a atividade aplicada com os alunos da graduação promoveu diversas reflexões acerca de textos históricos na formação inicial. Podendo, também, contribuir em relação ao debate relacionado ao pensamento algébrico com licenciandos, que deve ser cada vez mais discutido na formação, pois foi possível notar que alguns alunos, que chegaram à universidade, ainda enfrentam problemas com essa temática, entre os quais podem ser citadas as dificuldades na leitura e na interpretação da regra e do problema, que requeria abstração por parte dos estudantes.

Em relação ao nosso objetivo inicial, verificamos a importância do trecho de *Līlavātī* utilizado neste artigo, já que visualizamos, no decorrer da atividade, que os alunos, ao entrarem em contato com a mesma, mobilizavam o seu pensamento algébrico, a fim de encontrarem os resultados desconhecidos, manipulando a variável (número presumido) e a incógnita (valor a ser encontrado) usando somente na solução de Bhāskarācārya a Aritmética, revelando, assim, que a Álgebra não é apenas a manipulação de letras, mas envolve todo o processo pelo qual o aluno perpassa até abstrair o que está sendo construído na questão.

Diante disso, observamos que *Līlavātī* fornece recurso didático para a formação de professores, sendo vistos em seu conteúdo diversas regras e problemas que exploram métodos distintos de resoluções e problemas contextualizados, que são estudados na Educação Básica, permitindo repensar sobre a Matemática que vislumbramos atualmente e nos fornecendo a oportunidade de explorá-los com vistas a exercitar o nosso pensamento matemático/algébrico. Assim, evidenciamos que tratados históricos devem ser cada vez mais estudados, a fim de promover essa interface com o ensino de Matemática, promovendo um diálogo na graduação.

Em meio à atividade, foram notadas dificuldades de alguns alunos na tradução e na compreensão da regra e do problema. Viabilizando, dessa maneira, uma reflexão das pesquisadoras, tornando essa experiência um *insight* inicial para repensar situações na formação inicial de professores de Matemática, envolvendo o tratado histórico *Līlavātī.*

Portanto, está sendo desenvolvida uma pesquisa de mestrado nessa temática, buscando-se explorar pensamentos algébricos em torno de *Līlavātī*, que possam ser trabalhados com discentes do ensino superior, abrangendo momentos com textos históricos do *Līlavātī*, fornecendo um espaço de discussão sobre o pensamento algébrico e a história da Matemática.

Referências

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. Pensamento algébrico: em busca de uma definição. **Revista Paranaense de educação Matemática**, v. 6, n. 10, p. 34-60, 2017.

BHĀSKARĀCĀRYA. **Lilawati:** or a treatise on Arithmetic and Geometry. Tradução: John Taylor. Bombay: Literary society of Bombay, 1816.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CEARÁ. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática**. Fortaleza, 2018.

DALTO, J. O.; BURIASCO, R. L. C. Problema proposto ou problema resolvido: qual a diferença? **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 35, n. 3, p. 449-461, set. 2009.

ECO, U. **Quase a mesma coisa: experiências de tradução**. São Paulo: Record, 2007.

EVES, H. **Introdução a história da matemática**. Tradução: Hygino Domingues. 5. ed. Campinas - SP: Editora da UNICAMP, 2011.

FERREIRA, M. C. N. Álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma análise dos documentos Curriculares Nacionais**. REnCIMa**, v. 8, n. 5, p.16-34, 2017.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 2. ed. Campinas - SP: Autores Associados, 2006.

FREIRE, D. F.; PEREIRA, A. C. C. Os versos de Līlavātī como recurso didático para o ensino da regra de três simples e direta na Educação Básica. **Revista História da Matemática para Professores**, v. 8, p.1-13, 2022.

JOSEPH, G. G. **Indian Mathematics:** Engaging with the Word from Ancient to Modern Time. Canadá: World Scientific, 2016.

KUHN, M. C.; LIMA, E. Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental: reflexões a partir dos PCN e da BNCC para construção do pensamento algébrico significativo. **REnCiMa**, São Paulo, v. 12, n. 3, p. 1-23, 2021.

LUCENA, E. M. P. de; MEDEIROS, J. B. L. de P.; MENDES, R. M. de S. **Morfologia e anatomia de espermatófitas**. Fortaleza: Eduece, 2015.

MENDES, I. A. A investigação histórica na formação de professores de matemática. **Revista Cocar**, Pará, v. 4, p. 37-48, 2010.

PATWARDHAN, K. S.; NAIMPALLY, S. A.; SINGH, S. L. Introduction. In: **A Teatrise of Mathematics of Vedic Tradition**. New Delhi: Motilal Banarsidass, 2006.

RAMOS, R. de A. **Dicionário Didático de Língua Portuguesa**. 2 ed. São Paulo: Edições SM, 2011.

RIBEIRO, A. J. Álgebra e seu ensino: dando eco às múltiplas “vozes” da Educação Básica. **REnCiMa**, São Paulo, v. 7, n. 4, p. 1-14, 2016.

SILVA, I. C. da; SILVA, J. H. da; PEREIRA, A. C. C. Os versos de Līlavātī como fonte histórica para o ensino de Matemática: propondo uma prática. **Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 4, n. 1, p. 78-87, 2018.

TAYLOR, J. Introduction. In: **Lilawati**: or a treatise on Arithmetic and Geometry. BHĀSKARĀCĀRYA. Bombay: Literary society of Bombay, 1816.