

Conexões na resolução de problemas matemáticos: estratégias e abordagens docentes

Guilherme Hahn Krás¹

Marilaine de Fraga Sant'Ana²

Resumo: Este artigo advém de uma pesquisa de mestrado acadêmico que teve o objetivo de analisar as concepções de licenciandos em Matemática acerca da Resolução de Problemas e seus aspectos pedagógicos. A metodologia de pesquisa é qualitativa, e os dados analisados foram produzidos durante dois dos seis encontros propostos para (futuros) professores em um curso de extensão. Neste recorte, analisamos como a resolução de problemas pode ser uma aliada na construção de conexões mentais nas aulas de Matemática, e identificamos quais as conexões foram destacadas pelos participantes da pesquisa. Concluímos que a reflexão sobre Resolução de Problemas pode auxiliar os licenciandos a incorporar a construção de conexões em sua prática pedagógica, portanto, deve ser incentivada no curso de Licenciatura em Matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Resolução de Problemas. Conexões. Formação Inicial de Professores de Matemática. Licenciatura em Matemática.

Establishing connections in mathematical problem solving: strategies and teaching approaches

Abstract: This article arises from an academic master's research aimed at analyzing the conceptions of Mathematics undergraduate students regarding Problem Solving and its pedagogical aspects. The research methodology is qualitative, and the analyzed data were produced during two out of six proposed sessions for (future) teachers in an extension course. In this excerpt, we analyze how problem solving can be an ally in building mental connections in Mathematics classes and what connections were evidenced by the research participants. We conclude that reflecting on Problem Solving can help undergraduate students incorporate the construction of connections into their pedagogical practice, and therefore, it should be encouraged in the Mathematics Education program.

Keywords: Mathematics Education. Problem Solving. Connections. Initial Training of Mathematics Teachers. Mathematics Teaching Degree.

Estableciendo conexiones en la resolución de problemas matemáticos: estrategias y enfoques docentes

Resumen: Este artículo surge de una investigación de maestría académica cuyo objetivo fue analizar las concepciones de los estudiantes de licenciatura en Matemáticas sobre la Resolución de Problemas y sus aspectos pedagógicos. La metodología de investigación es cualitativa, y los datos analizados se produjeron durante dos de los seis encuentros propuestos para (futuros) docentes en un curso de extensión. En este fragmento, analizamos cómo la resolución de problemas puede ser una aliada en la construcción de conexiones mentales en las clases de Matemáticas y cuáles son las conexiones evidenciadas por los participantes de la investigación.

¹ Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) – Rio Grande do Sul, Brasil. ✉ guikras06@gmail.com 
<https://orcid.org/0000-0002-4478-683X>.

² Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) – Rio Grande do Sul, Brasil. ✉ marilaine@mat.ufrgs.br 
<https://orcid.org/0000-0002-6142-6510>.

Concluimos que la reflexión sobre la resolución de problemas puede ayudar a los estudiantes de licenciatura a incorporar la construcción de conexiones en su práctica pedagógica, y por lo tanto, debe ser fomentada en el programa de Licenciatura en Matemáticas.

Palabras clave: Educación Matemática. Resolución de Problemas. Conexiones. Formación Inicial de Profesores de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas.

1 Introdução

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) explicita, em um número considerável de competências e habilidades, a importância do trabalho com a resolução de problemas nas aulas de Matemática. Vemos isso nas competências específicas 1, 5, 6 e 8 do componente curricular Matemática do Ensino Fundamental (Brasil, 2018, p. 167) e 3 e 4 do Ensino Médio (Brasil, 2018, p. 531). A título de exemplo, elencamos a sexta competência específica do Ensino Fundamental:

Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados) (Brasil, 2018, p. 267).

A partir desse contexto, entendemos que há a necessidade de discutir não apenas a Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática, mas também os seus aspectos pedagógicos. Isso permite que o (futuro) professor construa uma prática pedagógica capaz de conduzir os alunos num processo de resolução de problemas de forma autônoma e compreensiva. De fato,

A concepção e o desenvolvimento de programas de formação de professores ou a de materiais instrucionais para os alunos são atividades de índole marcadamente prática que, no entanto, suscitam a necessidade da reflexão e aprofundamento teórico para compreender e melhorar a respectiva prática docente (Nunes, 2014, p. 3).

Nessa perspectiva, foi construída a dissertação de mestrado da qual este artigo é um recorte (Krás, 2023), apresentada pelo primeiro autor e orientada pela segunda autora no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Na pesquisa de mestrado, a produção de dados foi realizada por meio de um curso de extensão universitária com seis encontros, destinado a licenciandos em Matemática, tendo como objetivo a discussão e reflexão sobre a Resolução de Problemas e seus aspectos pedagógicos. Os dados foram produzidos com o intuito de responder à seguinte pergunta diretriz: *Quais são*

as concepções construídas por licenciandos em Matemática acerca da Resolução de Problemas e dos seus aspectos pedagógicos?

Para a realização de tal pesquisa, foi desenvolvida uma revisão de literatura com base no Catálogo de Teses e Dissertações³ da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), a partir do qual obtivemos trabalhos com os seguintes filtros: teses e dissertações de mestrado ou doutorado acadêmico, concluídas entre 2012 e 2021, que discutissem a Resolução de Problemas com um grupo de professores ou licenciandos de Matemática de forma abrangente, isto é, sem se limitar a apenas uma área ou conteúdo específico de Matemática.

Com base nessa revisão, encontramos oito trabalhos que respeitavam os critérios supracitados: Huanca (2014); Azevedo (2014); Justulin (2014); Moço (2013); Magni (2017); Cavalheiro (2017); Figueiredo (2017) e Proença (2012). Dois deles – a saber, Moço (2013) e Proença (2012) –, discutiram a Resolução de Problemas em cursos de Licenciatura em Matemática de um modo geral, isto é, sem falar sobre um tópico específico da temática. Diante das conclusões dos autores, notou-se que a dissertação produzida poderia contribuir com as pesquisas já realizadas ao dar enfoque aos aspectos pedagógicos da Resolução de Problemas e às concepções construídas pelos licenciandos.

Neste artigo, destacamos o estudo das conexões, que, segundo Van de Walle (2009), são uma forma de entender o aprendizado. Quanto maior a quantidade e qualidade dessas conexões em relação a determinado assunto, maior é o nível de compreensão que se tem sobre tal tema. Nossos objetivos neste trabalho são *compreender de que forma a resolução de problemas matemáticos pode ser uma aliada na construção de conexões e entender quais conexões são evidenciadas por licenciandos em Matemática a partir da resolução de um problema*.

Ao longo deste artigo, refletimos sobre a construção de conexões mentais como uma das maneiras de entender como o aprendizado acontece. A partir disso, apresentamos diferentes tipos de conexões que podem ser evidenciadas nas aulas de Matemática. Em sequência, discutimos sobre a resolução de problemas como uma alternativa para criar um ambiente que possa auxiliar os estudantes a aprenderem Matemática, construindo conexões com a mediação do professor. Apresentamos um

³ Disponível em: <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/>.

potencial problema, discutido com licenciandos em Matemática da UFRGS.

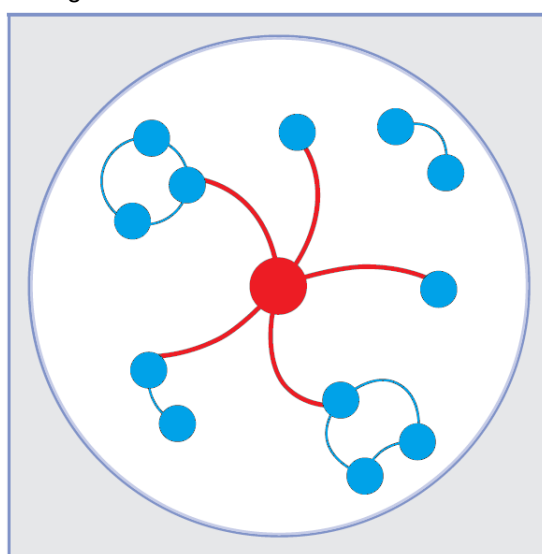
Por fim, relacionamos os dados produzidos com os referenciais teóricos consultados, destacando as conexões construídas pelos licenciandos a partir do problema proposto. Assim, a pesquisa culmina em estratégias e abordagens que podem ser incorporadas à prática docente dos professores de Matemática, com o intuito de promover a construção de conexões mentais por meio da resolução de problemas em suas próprias aulas.

2 Como aprendemos? Um panorama das conexões

Segundo Van de Walle (2009), a aprendizagem é fruto do processo de reorganização, acréscimo ou modificação de informações nas nossas estruturas de conhecimento preexistentes. Isto é, trata-se de uma “reconstrução” daquilo que já sabíamos, seja acrescentando novos fatos a essas estruturas, seja reorganizando ou substituindo informações que se tornam obsoletas ou cuja falsidade é percebida com base em uma nova interpretação da realidade.

Van de Walle (2009) ainda ressalta que essa reconstrução pode se ocorrer a partir de novos fatos isolados ou de informações que se conectam, de alguma maneira, ao que já conhecíamos, como podemos ver na Figura 1. Nela, a bolinha vermelha representa uma nova informação que se conecta às ideias anteriores, indicadas pelas bolinhas azuis.

Figura 1: Estabelecimento de conexões

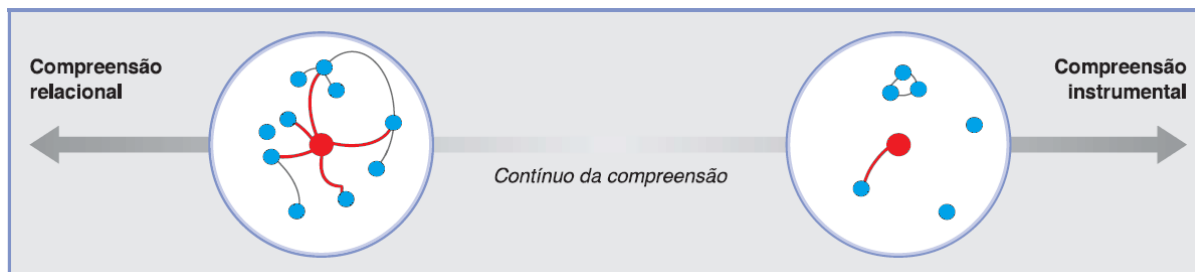


Fonte: Adaptado de Van de Walle (2009, p. 43).

O autor também traz a ideia de que o nível de compreensão de determinado conceito ou procedimento está relacionado à quantidade e à qualidade das conexões

mentais construídas sobre aquele tópico (Van de Walle, 2009). Com base nisso, diferencia-se a *compreensão relacional*, caracterizada pela riqueza de conexões, da *compreensão instrumental*, constituída por ideias isoladas e sem significado, como ilustrado na Figura 2:

Figura 2: Compreensão relacional e compreensão instrumental



Fonte: Adaptado de Van de Walle (2009, p. 44).

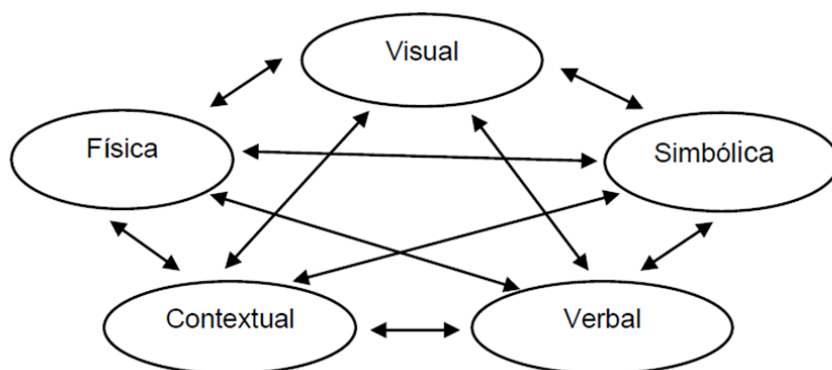
Assumindo que o aprendizado ocorre dessa forma, entendemos que se torna necessário pensar o ensino de Matemática não com o objetivo de meramente apresentar definições e teoremas, repetindo exercícios para "consolidar o aprendizado", mas principalmente como uma forma de desenvolver as conexões mentais dos estudantes em relação à própria Matemática. Essas conexões podem ocorrer de várias maneiras, como exemplificam Allevato e Onuchic (2019): entre a Matemática e outras áreas do saber; entre a Matemática e a vida real (ou mundo do trabalho); entre conteúdos de Matemática e entre conhecimentos prévios e novos.

Canavarro (2017) argumenta sobre a importância de estabelecer tais conexões, o que traz uma série de benefícios sobre o seu incentivo em sala de aula:

Os alunos aprendem com maior aprofundamento da compreensão, nomeadamente quando diversas representações são conectadas; os alunos conseguem conceber a Matemática como uma atividade que faz sentido; os alunos desenvolvem capacidades transversais, nomeadamente de interrogar e interpretar no contexto das conexões abordadas; os alunos desenvolvem uma atitude mais favorável relativamente à Matemática, apreciando o seu valor como explicação das situações extra-matemáticas e possibilidade de predição/intervenção sobre essas situações; os alunos aprendem não só conteúdos da matemática como também dos assuntos extra-matemáticos que são abordados (p. 41-42).

Além disso, a autora ressalta a importância das conexões entre diferentes representações de um mesmo conceito, que podem ser visuais, físicas, simbólicas, verbais ou contextuais (Figura 3). Segundo ela, “cada representação funciona como uma lente e a sua conjugação proporciona uma imagem mais completa e articulada do conceito” (Canavarro, 2017, p. 39).

Figura 3: Tipos de representação de um conceito matemático



Fonte: Canavarro (2017, p. 39).

Podemos pensar, por exemplo, no lançamento de uma bola. A partir desse contexto, também é possível modelar a situação por meio de uma função que relaciona a altura da bola e o tempo; desenhar o seu gráfico; montar uma tabela com os dados; ter acesso a um enunciado de um problema por escrito etc., obtendo uma série de formas diferentes de representar a mesma situação. Também podemos pensar nos números, representados por numerais, figuras ou objetos manipuláveis.

Canavarro (2017, p. 39) afirma que as conexões entre conceitos não devem ser mencionadas de modo esporádico, mas sim “integrar a experiência matemática dos alunos, de forma intencional e continuada”. No entanto, como isso pode ser feito? Desde a forma como se discute determinado conteúdo ou se justifica certo algoritmo, utilizando modelagem matemática ou tecnologias, podemos ver diferentes conexões sendo formadas. Entretanto, gostaríamos de refletir sobre o uso da resolução de problemas como ferramenta para construir tais conexões, visando o aprendizado dos estudantes.

3 (Re)conectando: o aprendizado por meio de problemas matemáticos

Entendemos o problema como “algo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer” (Onuchic e Allevato, 2011, p. 81). Partindo desse pressuposto, a resolução de problemas matemáticos é o envolvimento com atividades ou tarefas desafiadoras e interessantes para o resolvido. Defendemos que a resolução de problemas tem a potencialidade de desenvolver, nos estudantes, diversas das conexões mentais dispostas na seção anterior.

Polya (2006) apresenta, como uma heurística (estratégia geral de resolução de um problema), a tentativa de representar a situação problemática de diferentes

formas, procurando uma que seja conveniente e auxilie no processo de resolução. Ao fazer isso, incentiva-se a conexão entre as diferentes representações elencadas por Canavarro (2017), vendo a situação por diferentes perspectivas. Allevato e Onuchic (2019) argumentam sobre a importância das conexões nas diferentes representações:

Estudantes capazes de aplicar e transitar entre diferentes representações de uma situação-problema ou de um conceito matemático possuem um conjunto de ferramentas flexíveis e poderosas para a resolução de problemas. É importante que eles construam um repertório de conexões, como um “kit de ferramentas”, que lhes ofereça caminhos alternativos e criativos de resolução para os problemas propostos. E, ainda, embora não seja condição suficiente para o sucesso na resolução de um problema, a habilidade de estabelecer conexões é necessária para o desenvolvimento da autonomia do estudante nessa atividade (p. 7).

Também é possível verificar que resolver problemas, na verdade, é um processo de estabelecer diversas conexões entre os dados e a incógnita, por meio de passos de resolução. Kilpatrick (2017) argumenta que, ao resolver um problema, o decompomos em problemas menores, que, coletivamente, formam a solução para o original. Do mesmo modo, se considerarmos uma demonstração matemática como um problema a ser resolvido, também podemos pensá-la como um conjunto de implicações conectadas que, quando vistas de modo geral, indicam-nos a demonstração completa. Quando resolvemos problemas complexos, com diversos passos, exercitamos essas conexões, extraindo dos dados novas informações até alcançar a incógnita desejada.

Polya (2006) defende a ideia de que, durante a resolução de um problema, o professor deve considerar os conhecimentos prévios do estudante e permitir que ele pense de forma autônoma. Segundo o autor, isso pode ser feito por meio de indagações que poderiam ter sido pensadas pelo próprio estudante, para que ele se acostume a tomar consciência do seu processo de resolução e consiga resolver outros problemas com mais facilidade. Polya (2006) acrescenta:

Além disso, quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas ideias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os alunos. Graças a essa orientação, o estudante acabará por descobrir o uso correto das indagações e sugestões e, ao fazê-lo, adquirirá algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer (p. 4).

Entretanto, Polya (2006) ressalta que o professor deve ter cuidado com o tipo de questionamento que ele faz, pois alguns podem tornar o aluno um sujeito passivo

no seu processo de aprendizado. A título de exemplo, o autor descreve um possível diálogo entre um professor e seus alunos para determinar uma fórmula para o cálculo da medida da diagonal de um bloco retangular. Ele argumenta que, se o professor fizer o questionamento “é possível aplicar o Teorema de Pitágoras?”, embora tenha a melhor das intenções, isso pode ter várias implicações negativas, tais como:

- (1) Se o estudante estiver próximo da solução, ele entenderá a sugestão implícita na indagação; mas se não estiver, é muito provável que de modo algum perceba onde se quer chegar com a questão. Assim, esta deixará de auxiliar no exato momento em que o auxílio mais se fizer necessário.
- (2) Se a sugestão for compreendida, ela revelará todo o segredo, muito pouco restando para o estudante fazer.
- (3) A sugestão é de natureza muito específica. Mesmo que o estudante a aproveite na resolução do presente problema, nada aprenderá para problemas futuros. A questão não é instrutiva.
- (4) Mesmo que ele compreenda a sugestão, o estudante dificilmente perceberá como ocorreu ao professor apresentar tal questão. E como poderia ele, o estudante, chegar a esta questão por si próprio? Parece um passe de mágica, assim como tirar um coelho de um chapéu. A questão realmente nada tem de instrutiva (Polya, 2006, p. 18).

A partir da reflexão de Polya (2006), vemos que, ao sugerir a estratégia de resolução sem conduzir o aluno num processo de descoberta, o professor perde a oportunidade de construir conexões entre o contexto apresentado e a estratégia de resolução. Entendemos que a compreensão relacional seria incentivada se o estudante conseguisse compreender não apenas o procedimento, mas também quando ele pode ser aplicado, identificando que se trata de uma situação que envolve um triângulo retângulo e seus três lados.

Ponte (2010) afirma que as conexões entre conteúdos ou representações matemáticas podem ocorrer entre temas de mesma área (como Teorema de Tales e semelhança de triângulos, ambos relativos à Geometria Plana) ou entre temas de áreas distintas (como a representação algébrica e gráfica de um sistema de equações de primeiro grau). Além disso, o autor ressalta que também há situações em que os alunos desenvolvem conexões de modo incorreto.

Para exemplificar, podemos pensar no perímetro e na área, em que os estudantes enxergam relações que não são verdadeiras sempre (por exemplo, “quanto maior o perímetro, maior a área”, já que existem pares de polígonos em que o perímetro do primeiro é maior que o do segundo, mas a área do segundo é maior que a do primeiro). Nesse caso, o professor tem o papel de identificar tais conexões incorretas e corrigi-las, o que pode vir à tona enquanto o estudante resolve um

problema. Isso evidencia um outro processo importante durante a resolução de problemas: a avaliação, que pode acontecer não apenas durante testes ou provas, mas de modo contínuo durante as abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas (Pironel e Onuchic, 2021).

4 Produção de dados

Em Krás (2023), desenvolvemos um curso de extensão destinado a alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. O objetivo do curso foi proporcionar momentos de discussão e reflexão sobre a Resolução de Problemas e os seus aspectos pedagógicos a partir de leituras, questões a serem resolvidas e apresentadas, debates etc., visando entender quais concepções os participantes traziam sobre o assunto.

No primeiro encontro, dos cinco estudantes que participaram do curso de extensão, dois não conseguiram conciliá-lo com o seu trabalho, enquanto os outros três tiveram participação assídua. Todos preencheram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e seus nomes foram alterados para fins de anonimato durante o estudo.

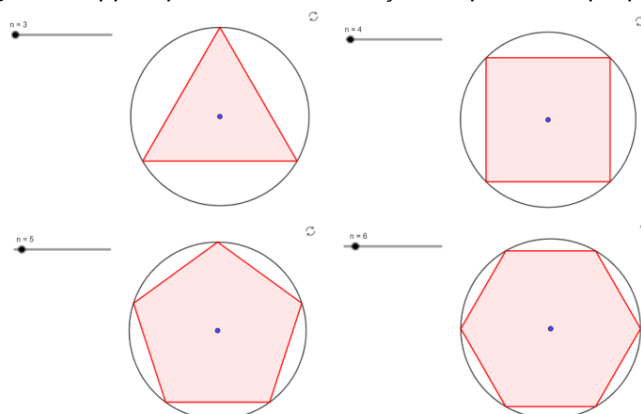
A pesquisa se caracteriza como qualitativa, pois entende que “o conhecimento não é isento de valores, de intenção e da história de vida do pesquisador, e muito menos das condições sociopolíticas do momento” (Borba, 2004, p. 3); não parte de uma hipótese inicial a ser comprovada ou refutada; prioriza a descrição detalhada acompanhada das reflexões aportadas pela teoria; e não tem intenção de generalizar as conclusões. De modo mais particular, incorpora elementos dos experimentos de ensino, uma vez que foram propostas atividades pedagógicas aos estudantes participantes da pesquisa, a partir das quais os dados para a análise foram produzidos. Obtivemos os registros dos dados mediante questionários, observações dos encontros, materiais elaborados pelos participantes e gravações de áudio.

Tal análise buscou responder à seguinte pergunta diretriz da pesquisa: *Quais são as concepções construídas por licenciandos em Matemática acerca da Resolução de Problemas e dos seus aspectos pedagógicos?* Neste artigo, considerando a perspectiva da construção de conexões por meio da resolução de problemas, estabelecemos os seguintes objetivos específicos: *compreender de que forma a resolução de problemas matemáticos pode ser uma aliada na construção de conexões e entender quais conexões são evidenciadas por licenciandos em Matemática a partir*

da resolução de um problema.

No terceiro encontro do curso mencionado, o professor-pesquisador (PP) propôs que os participantes resolvessem a seguinte atividade: modelar uma função que informe a área de um polígono regular de n lados, inscrito em uma circunferência de raio unitário. Para isso, foi apresentado um *applet*⁴ no *software* GeoGebra⁵ (Figura 4) que mostrava a variação dos polígonos a depender do valor de n .

Figura 4: *Applet* para contextualização do problema proposto



Fonte: Produzido pelos autores.

No encontro seguinte, dois participantes estavam presentes: Marcelo e Lucas. Cabe ressaltar que, nos encontros anteriores, já havíamos iniciado discussões sobre os aspectos pedagógicos da Resolução de Problemas. Estávamos nos questionando sobre qual o papel do professor ao utilizar abordagens que envolvem essa tendência e quais ações o docente poderia realizar para potencializar o aprendizado dos seus estudantes. Marcelo se voluntariou para apresentar a sua resolução a Lucas e ao professor-pesquisador, afirmando o seguinte:

Marcelo: Vou tomar cuidado pra usar a estratégia de lançar bastante pergunta pra turma. Tô tentando fazer com os meus também e tô tendo altos resultados.

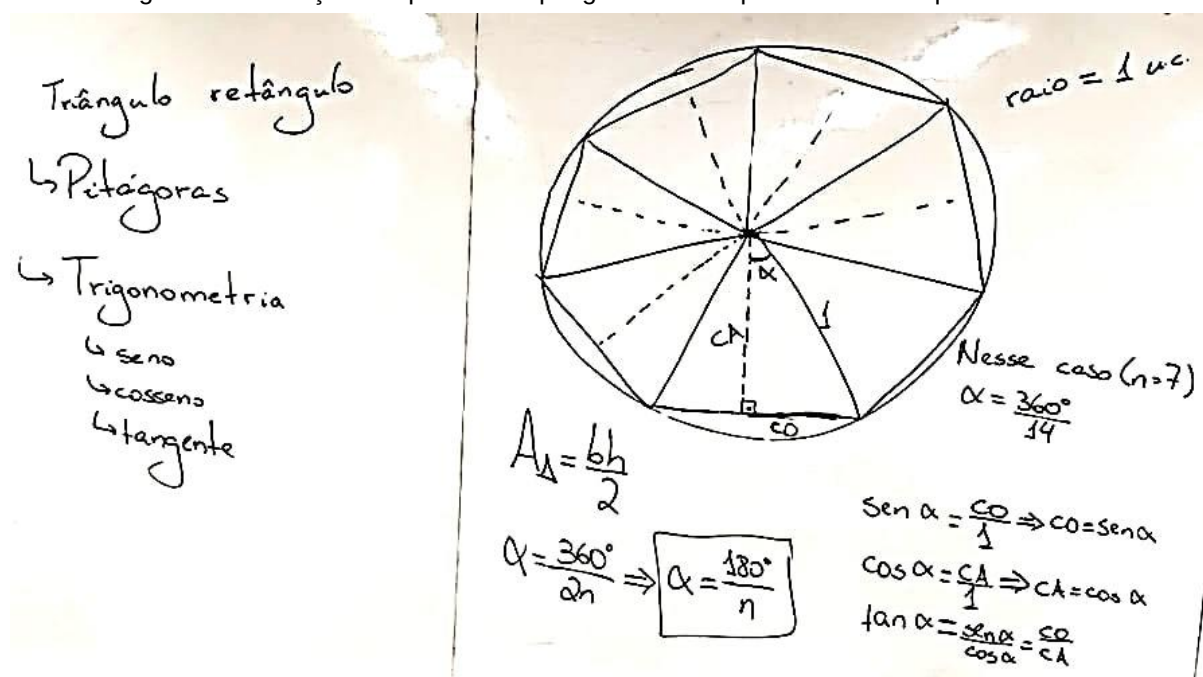
O licenciando comentou que, embora estivéssemos trabalhando com um polígono de n lados, seria interessante escolher algum de 6 ou 7 lados para ajudar na visualização e generalização do procedimento. Ele afirmou que não tínhamos uma fórmula para calcular a área de tal polígono, mas questionou quais figuras tinham um método conhecido para calcular a área. Os outros participantes responderam

⁴ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/u6nzbmrmd>.

⁵ "O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar". Disponível em: <https://www.geogebra.org/about>. Acesso em: 20 set 2021.

triângulos e quadrados.

Figura 5: Resolução da questão do polígono inscrito por Marcelo no quarto encontro



Fonte: Dados da pesquisa.

Marcelo: Então, eu consigo dividir esse polígono em triângulos ou em quadrados ou em alguma outra forma da qual eu tenha essa expressão?

PP: Dá pra fatiar que nem uma pizza, sor!

Marcelo: Isso aí! Certo. Meus triângulos, eles não ficaram muito iguais, mas é por causa do meu desenho. A gente tá assumindo que todos os lados têm a mesma medida e, portanto, esses triângulos seriam congruentes. Certo. O que eu preciso pra ter a área de um triângulo?

[...]

Lucas: A gente podia descobrir a altura do triângulo.

O licenciando traçou a altura de um dos triângulos e perguntou o que poderíamos dizer sobre ele ou sua altura. Foi respondido que era um triângulo retângulo, e Marcelo questionou quais ferramentas poderíamos utilizar que envolvessem seus lados. O professor-pesquisador sugeriu que utilizássemos o Teorema de Pitágoras. Marcelo fez uma lista em um canto do quadro com as possíveis ferramentas, incluindo o teorema mencionado, e perguntou sobre outras possíveis ferramentas a serem utilizadas.

Marcelo: Antes disso, pra Pitágoras, do que a gente precisa? Pra que a gente usa e o que a gente precisa?

PP: A gente trabalha com os três lados do triângulo: a hipotenusa e os catetos.

Marcelo questionou a Lucas e ao professor-pesquisador sobre quais seriam a

hipotenusa e os catetos do triângulo analisado. A partir das informações obtidas, perguntou se seria possível aplicar o teorema nesse caso para descobrir um dos catetos. Os demais afirmaram que isso não seria viável naquele momento, uma vez que, não conhecendo a medida de nenhum dos catetos ou uma forma de relacioná-los, resultaria em uma equação com duas incógnitas.

Ao perguntar sobre outras possibilidades de ferramentas, surgiu a ideia de utilizar a trigonometria no contexto do triângulo retângulo. Marcelo questionou o que seria necessário para trabalhar com esse conteúdo e incentivou o estudo dos ângulos no triângulo como uma forma de aplicar as fórmulas. Em particular, sugeriu olharmos para um dos ângulos centrais da circunferência e perguntou qual seria o seu valor. O professor-pesquisador comentou que bastava dividir 360° por 14, que era a quantidade de triângulos retângulos presentes no heptágono que Marcelo havia desenhado como exemplo. Assim, ele conduziu um processo de generalização e explicou que (e por que) um dos ângulos do triângulo retângulo mediria $\frac{360^\circ}{2n}$, ou $\frac{180^\circ}{n}$ após a simplificação.

Ele lembrou que o objetivo era chegar na área da figura, e por isso precisaríamos da base e da altura, que poderiam ser expressas em termos do valor do ângulo α , marcado na Figura 5, o qual seria substituído por $\frac{180^\circ}{n}$. Assim, a partir de perguntas ao professor-pesquisador e a Lucas, utilizando trigonometria, chegamos às relações $CO = \sin(\alpha)$, $CA = \cos(\alpha)$ e $\tan(\alpha) = \frac{CO}{CA}$ (Figura 5).

Por fim, considerando $CO = \sin(\alpha)$ e $CA = \cos(\alpha)$, temos que a base de cada um dos triângulos isósceles decompostos mede $2 \cdot \sin(\alpha)$ unidades de comprimento, enquanto suas alturas medem $\cos(\alpha)$ unidades de comprimento. Dessa maneira, chegamos à conclusão de que a área de cada triângulo é de $\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$ unidades de área, e fórmula da área procurada seria $A(n) = n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$.

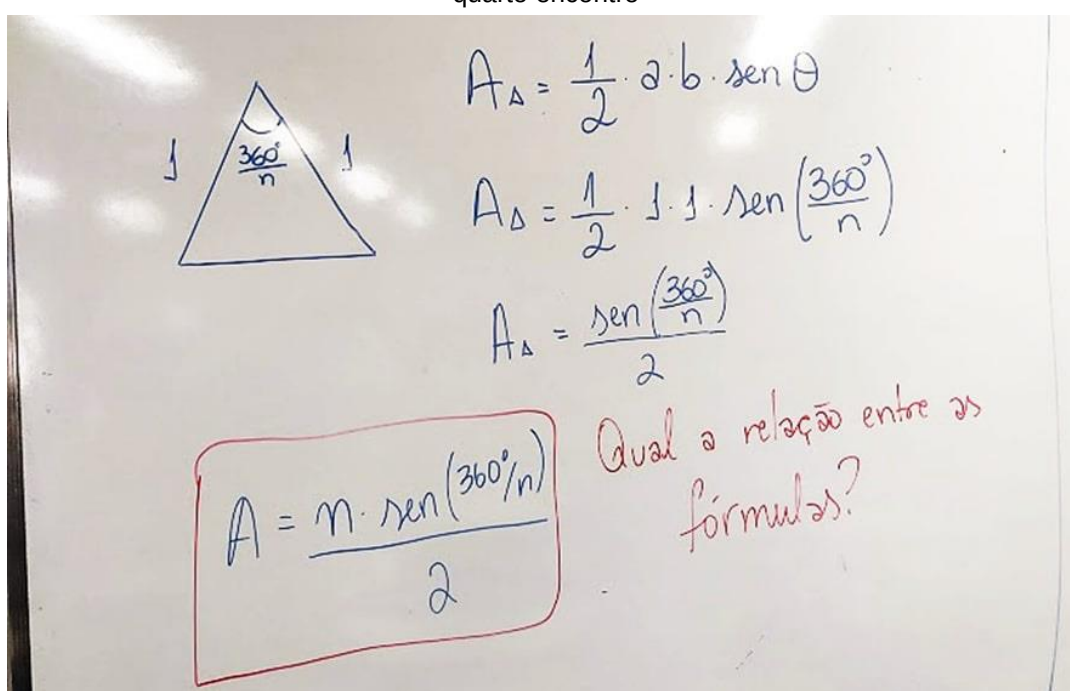
5 Um problema: várias conexões

Embora a atividade em questão tenha apenas elementos da Matemática Pura, existem diversas conexões que podem ser feitas. Observamos que há uma relação entre diferentes áreas da Matemática, já que partimos de um contexto geométrico, utilizamos elementos da trigonometria e obtivemos uma função como resposta final. Além disso, um problema pode ser uma fonte de conexões, pois conseguimos criar

várias resoluções para ele.

Isso fortalece no resolvido a compreensão de que a Matemática é uma ciência com ideias muito bem articuladas e fundamentadas, que nos permitem pensar corretamente de diversas maneiras, estabelecendo diferentes conexões que não alteram nossa conclusão. Podemos citar uma resolução alternativa feita pelo professor-pesquisador no encontro 4, que utiliza uma estratégia similar à de Marcelo, mas com uma fórmula diferente para calcular a área dos triângulos compostos (Figura 6).

Figura 6: Resolução da questão do polígono inscrito pelo professor-pesquisador no quarto encontro



Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa resolução, utilizamos as informações deduzidas por Marcelo e a fórmula $A_{\Delta} = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\theta)}{2}$, em que A_{Δ} é a área de cada triângulo, a e b são dois de seus lados e θ é o ângulo entre eles, para obtermos a fórmula $A = \frac{n \cdot \sin(\frac{360^\circ}{n})}{2}$ para a área do polígono, um pouco diferente da encontrada por Marcelo. Qual será, então, a conexão entre as duas fórmulas? Os licenciandos foram desafiados a pensar sobre isso, e juntos fizemos uma verificação da igualdade das duas fórmulas utilizando a propriedade do seno da soma de dois arcos, conforme é apresentado na Figura 7:

Figura 7: Igualdade entre as fórmulas da área dos polígonos

$$A = \frac{n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n} + \frac{180^\circ}{n}\right)}{2} = \frac{n \left[\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) + \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \right]}{2}$$

$$= \frac{n \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}{2} = n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

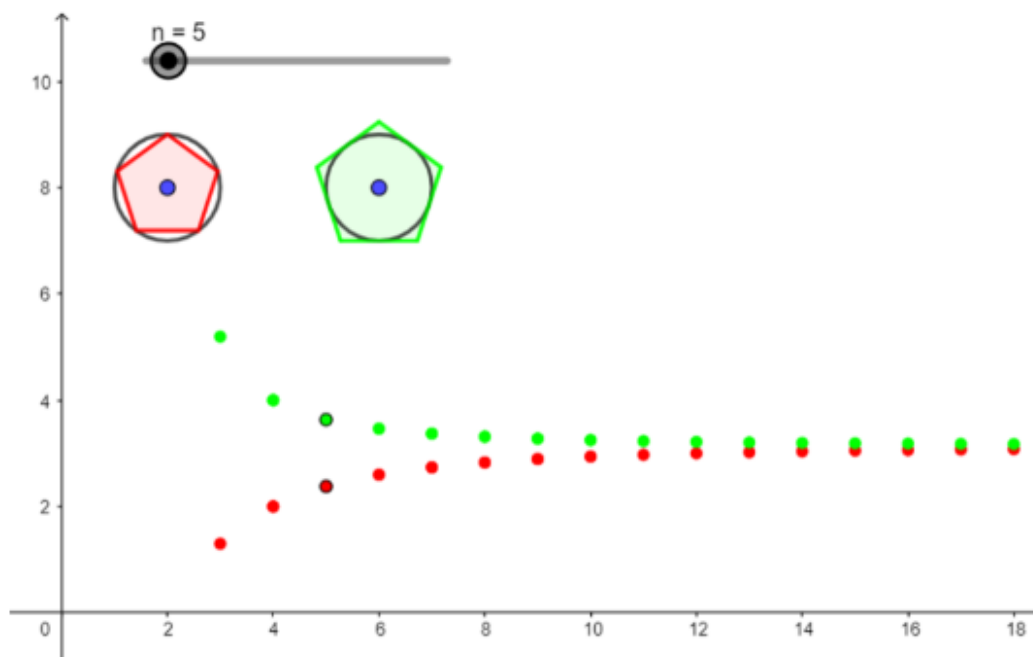
Fonte: Dados da pesquisa.

Desse modo, estabelecemos a conexão entre diferentes fórmulas para um mesmo problema. No momento da construção da equivalência, os licenciandos tiveram dificuldade em perceber uma estratégia para relacionar as duas fórmulas. Foi preciso a intervenção do professor-pesquisador, que, por meio de questionamentos, sugeriu que a relação entre $\frac{360^\circ}{n}$ e $\frac{180^\circ}{n}$ poderia ser expressa por $\frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n} + \frac{180^\circ}{n}$.

Ainda consideramos que é possível estabelecer conexões entre o problema que foi resolvido e outros similares a ele. Após as discussões sobre a questão, Marcelo e Lucas sugeriram formas de generalizá-la, buscando determinar: o volume de prismas de base poligonal regular inscritos em cilindros; a área interior ao círculo e exterior ao polígono inscrito; o volume de prismas de base poligonal regular inscritos em esferas; a área do polígono regular circunscrito à circunferência; o volume de pirâmides de base poligonal regular inscritas em cilindros; a área do polígono, mas ao ser inscrito em uma circunferência de raio r ; entre outros contextos.

No quinto encontro, foi discutido com os licenciandos o texto de Allevato e Onuchic (2019) sobre as conexões na resolução de problemas. Para suscitar a discussão acerca de diferentes conexões, o professor-pesquisador resgatou uma das sugestões dos licenciandos sobre adaptações do problema, feitas no encontro anterior, e deduziu rapidamente uma fórmula para a área de um polígono regular circunscrito a uma circunferência de raio unitário, obtendo a relação $A = n \cdot \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$. A partir disso, foi apresentado um *applet* aos licenciandos, com pares ordenados associando o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos à sua área, como podemos ver na Figura 8.

Figura 8: Applet que mostra as áreas dos polígonos inscritos e circunscritos



Fonte: Elaborado pelos autores.

O professor-pesquisador questionou quais conexões poderíamos estabelecer entre a representação pictórica e a gráfica, com base no texto que foi discutido:

Marcelo: Eu acho que elas vão se aproximando do mesmo valor conforme tu aumenta o número de lados, né? Porque pensando no limite, quando n tende ao infinito, tu teria dois círculos de mesmo raio, que teriam a mesma área.

Notamos que o licenciando identificou que há um conceito intuitivo de limite associado às representações do problema. A ideia do círculo descrita por Marcelo, no ponto de vista analítico, corresponde a um comportamento convergente dos pares verde e vermelho, que tendem para uma assíntota horizontal $y = \pi$. Isso exemplifica a ideia de Canavarro (2017) sobre a importância das conexões entre diferentes representações de um mesmo conceito e como elas revelam diversas formas de observar a mesma propriedade, resultando em uma compreensão mais ampla do conceito associado.

Para confirmar a hipótese de Marcelo, procedemos com o cálculo do limite das áreas, adaptando as fórmulas para funções reais de variável real, conforme ilustrado na Figura 9. Em relação ao primeiro limite, os licenciandos tiveram dificuldade em sugerir uma estratégia, sendo necessária a intervenção do professor-pesquisador, que indicou a substituição de variáveis após a análise das circunstâncias do limite junto com os participantes.

Figura 9: Cálculo do limite das áreas dos polígonos

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) &\stackrel{t = \frac{\pi}{x}}{=} \lim_{x = \frac{\pi}{t}} \frac{\pi}{t} \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) \\
 &\stackrel{t \rightarrow 0}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi}{t} \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) \\
 &= \pi \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} \right) \left(\lim_{t \rightarrow 0} \cos(t) \right) = \pi \\
 &\quad \begin{array}{c} \text{Por L'H:} \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(t)}{1} = \cos(0) = 1 \end{array} \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} x \tan\left(\frac{\pi}{x}\right) &\stackrel{t = \frac{\pi}{x}}{=} \lim_{x = \frac{\pi}{t}} \frac{\pi}{t} \tan(t) = \pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan(t)}{t} \\
 &\stackrel{\text{L'H}}{=} \pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sec^2(t)}{1} = \pi \cdot \sec^2(0) = \frac{\pi}{\cos^2(0)} = \frac{\pi}{1} = \pi
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Por fim, é interessante verificar que o potencial problema revela relações não apenas matemáticas, mas também conexões a partir de aspectos pedagógicos da Resolução de Problemas. Marcelo, ao conduzir o processo de resolução com o professor-pesquisador e Lucas, envolveu os participantes em um processo de dramatização, como sugerido por Polya (2006).

O professor-pesquisador e Lucas se colocaram no papel de alunos, contribuindo para o processo de resolução de Marcelo, que assumiu uma posição de mediador. Marcelo não se limitou a expor os seus argumentos, mas se preocupou principalmente em conduzir os demais participantes do encontro nesse processo. Ele fez isso a partir de questionamentos que poderiam ter surgido durante a resolução: “Se não sei calcular a área desse polígono, de quais outros eu sei?”; “Quais informações eu preciso para calcular tais áreas?”; “Como posso obtê-las?”, entre outras perguntas. Desse modo, o professor mediou a construção de conexões entre conhecimentos prévios e novos, isto é, “Como posso utilizar as ferramentas que já tenho para resolver um problema que eu nunca havia visto?”

Quando o professor-pesquisador, de forma proposital e provocativa, sugeriu o Teorema de Pitágoras para determinar a base a altura dos triângulos decompostos

durante a resolução da atividade, Marcelo questionou quais informações seriam necessárias para aplicar tal teorema. Ao entender que o Teorema de Pitágoras relaciona os três lados de um triângulo retângulo e só possuíamos a informação de um dos lados, fez-se necessário o uso de outra estratégia. Desse modo, vemos que Marcelo se preocupou em relacionar estratégias de resolução com o contexto em que podem ser utilizadas.

O licenciando não sugeriu o uso das relações trigonométricas para determinar as medidas dos lados dos triângulos retângulos, mas deu a oportunidade para os demais sugerirem estratégias. De acordo com Polya (2006), o professor deve ter esse olhar para que os seus estudantes entendam que as estratégias não surgem do nada, mas são uma escolha consciente a partir de um conjunto de condições em uma situação problemática.

6 Considerações finais

Discutimos, neste artigo, que uma das formas de entender o aprendizado é vê-lo a partir da construção de diversas conexões mentais entre informações, conceitos e procedimentos. Além disso, o grau de compreensão é associado à quantidade e à qualidade das conexões construídas (Van de Walle, 2009). Por isso, compreendemos que uma das formas pelas quais o professor de Matemática pode auxiliar no aprendizado de seus estudantes é promovendo a construção das conexões em sala de aula, de maneira intencional e continuada (Canavarro, 2017).

Apresentamos a resolução de problemas como um meio para tanto e refletimos, ao longo deste artigo, sobre formas que isso pode se dar, buscando atingir os seguintes objetivos específicos: *compreender de que forma a resolução de problemas matemáticos pode ser uma aliada na construção de conexões e entender quais conexões são evidenciadas por licenciandos em Matemática a partir da resolução de um problema.*

Para alcançar esses objetivos, analisamos os dados produzidos a partir de um problema proposto em um curso de extensão sobre Resolução de Problemas e seus aspectos pedagógicos, destinado a licenciandos em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, discutindo diversas conexões que podem ser estabelecidas.

Ao retomar o nosso primeiro objetivo específico, *compreender de que forma a*

resolução de problemas matemáticos pode ser uma aliada na construção de conexões, gostaríamos de ressaltar algumas das conexões observadas entre: diversos conteúdos e áreas da Matemática; respostas equivalentes para o problema; representações diferentes de um mesmo conceito; e entre os dados e a incógnita. Ressaltamos, ainda, que existem problemas que evidenciam outros tipos de conexões, como as relações entre a Matemática e a vida real ou o mundo do trabalho (Allevato e Onuchic, 2019), isto é, problemas do dia a dia que podem ser resolvidos utilizando Matemática.

A análise relativa ao primeiro objetivo específico não se esgota quando voltamos o nosso olhar ao segundo: *entender quais conexões são evidenciadas por licenciandos em Matemática a partir da resolução de um problema*. A partir da resolução de Marcelo, observamos uma preocupação que não se limita a construir conexões entre representações, conceitos e áreas da Matemática, traçando um caminho consistente entre os dados e a incógnita. O licenciando também busca conexões entre conhecimentos prévios e novos, bem como entre o plano de resolução e os requisitos para executá-lo. Isso é observado quando Marcelo valoriza as ideias e estratégias dos demais participantes para construir uma resolução e no momento que debate o uso do Teorema de Pitágoras para determinar a base e a altura dos triângulos decompostos.

Ressaltamos, ainda, a possibilidade de conectar o problema discutido com outros potenciais problemas que podem envolver estratégias similares. Esse processo de generalização permite que as ideias construídas sejam aproveitadas para resolver situações mais complexas.

Um dos participantes também estabeleceu uma relação entre o conceito intuitivo de limite e diferentes representações (pictórica e gráfica) de uma mesma situação, que mais tarde foi formalizada por meio da Análise Real. Ambos apresentaram dificuldades no cálculo de limites e na conexão entre fórmulas equivalentes, situações que exigiram a aplicação de conceitos da Matemática Pura para resolver problemas.

Em virtude dos argumentos supracitados, concluímos que a Resolução de Problemas é uma forte aliada para a construção de conexões mentais e, por consequência, do desenvolvimento do pensamento matemático. Vimos que essas conexões podem ser construídas tendo em vista a compreensão do conteúdo

matemático, mas também a capacidade de resolução de problemas dos alunos, cuja evolução pode ser incentivada a partir da compreensão do professor sobre os seus aspectos pedagógicos.

Por isso, concordando com Allevato e Onuchic (2019), acreditamos que refletir sobre a Resolução de Problemas desde a formação inicial do professor de Matemática, e não apenas incorporá-la na prática pedagógica de forma impensada, é essencial nesse processo. No caso desta pesquisa, conforme o comentário de Marcelo no início da descrição dos dados, observamos que os encontros, os textos lidos e as discussões feitas no curso de extensão contribuíram para que o processo de resolução fosse conduzido com atenção à participação e ao envolvimento dos demais participantes, e não apenas do professor-resolvedor.

Com base nas conexões evidenciadas, sugerimos algumas estratégias relativas aos aspectos pedagógicos da resolução de problemas, baseados nos trabalhos consultados e nos dados produzidos, para desenvolver conexões ao resolver problemas nas aulas de Matemática: trabalhar, quando possível, com problemas que envolvam conteúdos distintos; incentivar os estudantes a argumentarem e justificarem os passos ao resolverem problemas; discutir diferentes estratégias de resolução, questionando se alguém pensou de forma diferente; auxiliar os estudantes sem dar respostas, mas fazendo perguntas para que eles pensem com o máximo de autonomia possível; evidenciar quando cada estratégia de resolução pode ser utilizada; refletir sobre problemas similares aos já resolvidos, de modo a prever a utilização da estratégia em diversas situações; e apresentar formas diferentes de representar o mesmo conceito ou procedimento.

Defendemos, a partir do que foi discutido, que refletir sobre tais ações desde a formação inicial pode auxiliar os (futuros) professores a utilizar a resolução de problemas como forma de construir conexões, de modo a integrar diferentes estratégias à sua prática pedagógica e, assim, criar um ambiente de aprendizado e autonomia para seus estudantes.

Referências

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. As conexões trabalhadas através da Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 1-14, 2019.

AZEVEDO, Elizabeth Quirino de. **O processo de ensino-aprendizagem-avaliação**

de matemática através da resolução de problemas no contexto da formação inicial do professor de matemática. 2014. 268f. Tese (Doutorado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.

BORBA, Marcelo. A pesquisa qualitativa em Educação Matemática. In: 27.^a reunião anual da Anped, 2004, Caxambu. In: **Anais da 27^a reunião anual da Anped.** Caxambu: ANPEd, 2004, p. 1-18.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018.

CANAVARRO, Ana Paula. O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem da matemática com conexões: ideias da teoria ilustradas com exemplos **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 144-145, p. 38-42, out./dez. 2017.

CAVALHEIRO, Gabriela Castro Silva. **Resolução de problemas e investigação matemática:** um processo de intervenção formativa para licenciandos em Matemática. 2017. 196f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Ciências. Universidade Estadual Paulista. Bauru.

FIGUEIREDO, Fabiane Fischer. **Design de problemas com a utilização das Tecnologias Digitais na formação inicial de professores de Matemática.** 2017. 275f. Tese (Doutorado). Universidade Luterana do Brasil. Canoas.

HUANCA, Roger Ruben. **A Resolução de Problemas e a Modelização Matemática no processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação:** uma contribuição para a formação continuada do professor de matemática. 2014. 315f. Tese (Doutorado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.

JUSTULIN, Andresa Maria. **A formação de professores de matemática no contexto da resolução de problemas.** 2014. 254f. Tese (Doutorado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.

KILPATRICK, Jeremy. Reformulando: Abordando a Resolução de Problemas Matemáticos como Investigação. In: ONUCHIC, Lourdes; JUNIOR, Luiz Carlos; PIRONEL, Márcio. (Org.). **Perspectivas para resolução de problemas.** 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p. 163-187.

KRÁS, Guilherme Hahn. **A Resolução de Problemas e seus aspectos pedagógicos:** uma reflexão com (futuros) professores de Matemática. 2023. 133 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Rio Grande do Sul.

MAGNI, Rosana Jorge Monteiro. **Grupo de Estudos sobre Resolução de Problemas:** um Caminho para o Desenvolvimento Profissional Docente. 2017. 242f. Tese (Doutorado). Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo.

MOÇO, Priscila Pedroso. **Discussões sobre a resolução de problemas enquanto estratégia metodológica para o ensino de Matemática.** 2013. 114f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Educação. Universidade Federal do Rio Grande. Rio Grande.

NUNES, Célia Barros. Resolução de problemas: uma proposta didática na formação de professores. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 5, n. 2,

p. 1-17, 2014.

ONUICHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

PIRONEL, Márcio; ONUICHIC, Lourdes de la Rosa. Resolução de problemas: oportunidade de avaliação para aprendizagem. In: **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. 2. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2021, p. 64-87.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, João Pedro da. Conexões no programa de matemática do ensino básico. **Educação e Matemática**, n. 110, p. 3-6, 2010.

PROENÇA, Marcelo Carlos de. **A resolução de problemas na licenciatura em matemática**: análise de um processo de formação no contexto do estágio curricular supervisionado. 2012. 208f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Ciências. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

VAN DE WALLE, John. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução de Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.