

Análise de erros em resolução de problema de geometria plana por estudantes do 6º e 7º ano do Ensino Fundamental em oficinas de preparação para a OBMEP

Mariza Camargo¹

Patrícia Rodrigues Fortes²

Felipe Mendes³

Resumo: Este artigo tem como objetivo identificar os erros na resolução de problemas de geometria plana por alunos da 2ª fase da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) Nível 1, que frequentaram oficinas de matemática no Campus da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) em Frederico Westphalen. A investigação se justifica pela compreensão mais profunda das dificuldades dos alunos e pelo aprimoramento da prática pedagógica. Fundamentado em Resolução de Problemas e Análise de Erros, foi aplicado um problema da OBMEP 2013 para analisar os erros mais comuns na resolução individual dos estudantes. Observou-se que muitos alunos erraram possivelmente devido à falta de compreensão do enunciado e dos conceitos geométricos, falta de prática, interpretação inadequada, nervosismo, tempo limitado e nível de dificuldade elevado do problema. Conclui-se que a análise de erros é crucial para melhorar o ensino de matemática no Ensino Fundamental, permitindo identificar áreas de fraqueza e desenvolver estratégias de ensino direcionadas para saná-las.

Palavras-chave: Olimpíada científica. Geometria. Aprendizagem de Matemática.

Analysis of errors in solving plane geometry problems by students in the 6th and 7th years of Elementary School in preparation workshops for the OBMEP

Abstract: This article aims to identify errors in solving flat geometry problems by students in the 2nd phase of the Brazilian Mathematics Olympiad for Public Schools (OBMEP) Level 1, who attended math workshops at the Federal University of Santa Maria (UFSM) - Campus in Frederico Westphalen. The research is justified by gaining a deeper understanding of students' difficulties and enhancing pedagogical practices. Grounded in Problem Solving and Error Analysis, a problem from the 2013 OBMEP was used to analyze the most common errors in students' individual problem-solving processes. It was observed that many students possibly erred due to lack of understanding of the statement and geometric concepts, lack of practice, inadequate interpretation, nervousness, limited time, and the problem's high level of difficulty. It is concluded that error analysis is crucial for improving mathematics education in Elementary School, allowing the identification of weaknesses and the development of targeted teaching strategies to address them.

Keywords: Scientific olympiad. Geometry. Mathematics learning.

¹ Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) – Frederico Westphalen/RS, Brasil. ✉ mariza@ufsm.br 
<https://orcid.org/0000-0002-5949-3263>. <http://lattes.cnpq.br/4207917790455660>

² Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) – Frederico Westphalen/RS, Brasil. ✉ patricia@ufsm.br 
<https://orcid.org/0000-0001-7963-867X>. <http://lattes.cnpq.br/0002893483510573>.

³ Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) – Frederico Westphalen/RS, Brasil. ✉ felipe1416@yahoo.com.br 
<https://orcid.org/0000-0001-7740-2567>. <https://lattes.cnpq.br/3195666712066048>.

Análisis de errores en la resolución de problemas de geometría plana por estudiantes de 6º y 7º grado de Educación Primaria en talleres de preparación para la OBMEP.

Resumen: Este artículo tiene como objetivo identificar los errores en la resolución de problemas de geometría plana por parte de alumnos de la 2ª fase de la Olimpiada Brasileña de Matemáticas de las Escuelas Públicas (OBMEP) Nivel 1, quienes asistieron a talleres de matemáticas en el Campus de la Universidad Federal de Santa Maria (UFSM) en Frederico Westphalen. La investigación se justifica por la comprensión más profunda de las dificultades de los alumnos y el perfeccionamiento de la práctica pedagógica. Basado en la Resolución de Problemas y el Análisis de Errores, se aplicó un problema de la OBMEP 2013 para analizar los errores más comunes en la resolución individual de los estudiantes. Se observó que muchos alumnos erraron posiblemente debido a la falta de comprensión del enunciado y los conceptos geométricos, falta de práctica, interpretación inadecuada, nerviosismo, tiempo limitado y nivel de dificultad elevado del problema. Se concluye que el análisis de errores es crucial para mejorar la enseñanza de matemáticas en la Educación Básica, permitiendo identificar áreas de debilidad y desarrollar estrategias de enseñanza dirigidas a abordarlas.

Palabras clave: Olimpiada científica. Geometría. Aprendizaje de Matemáticas.

1 Introdução

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), voltada para estudantes do Ensino Fundamental e Médio desde 2005, tem incentivado o desenvolvimento de habilidades matemáticas, como o pensamento lógico, a resolução de problemas e a criatividade. A OBMEP é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas do Brasil, realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).

Essa olimpíada científica ocorre anualmente em duas fases. Segundo regulamento da OBMEP (2024, p. 05), na 1ª fase são aplicadas provas objetivas com 15 questões para estudantes do 2º ao 5º ano do Ensino Fundamental, divididas em Olimpíada Mirim 1 (2º e 3º ano) e Mirim 2 (4º e 5º ano), e uma prova com vinte questões para estudantes do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ao 3º ano do Ensino Médio, diferenciadas por níveis e realizadas nas dependências de cada escola inscrita. Os níveis são definidos de acordo com o grau de escolaridade do estudante (Nível 01: 6º ou 7º ano do Ensino Fundamental; Nível 02: 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental; Nível 03: qualquer ano do Ensino Médio).

Após a divulgação dos resultados da 1ª fase no site da OBMEP (2024, p. 13), os estudantes classificados e inscritos para a 2ª fase participam de uma prova discursiva com seis questões, também diferenciadas por níveis, aplicada em locais

escolhidos pela coordenação da olimpíada. Para os inscritos na Olimpíada Mirim, a 2ª fase consiste em uma prova objetiva aplicada nas escolas.

Os estudantes com melhor desempenho nas duas fases de avaliação da referida olimpíada recebem, respectivamente, medalhas de ouro, prata e bronze, ou ainda um certificado de menção honrosa.

No Campus de Frederico Westphalen da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), o projeto "Ampliando Caminhos do Conhecimento pela OBMEP" realiza atividades de extensão universitária com o propósito de preparar os estudantes da região (cerca de 90 alunos da Educação Básica provindos dos municípios gaúchos de Frederico Westphalen, Seberi e Taquaruçu do Sul) para participarem da 2ª fase da OBMEP. Essas ações, realizadas anualmente desde 2016, entre os meses de junho a outubro, têm como enfoque aprimorar o domínio em Matemática dos estudantes que avançam para essa etapa da competição. O projeto consiste em Oficinas de Matemática, que se dedicam à análise e resolução de questões de provas anteriores da OBMEP, além de promover o ensino de conteúdos de Matemática que possam não ser conhecidos pelos participantes.

A proposta do projeto de extensão visa especificamente capacitar estudantes dos Níveis 1 e 2, inscritos para a 2ª fase da OBMEP, para que tenham e/ou aprimorar a sua capacidade de desenvolver estratégias de resolução de problemas que abrangem diversos temas, como lógica, geometria, álgebra, estatística, entre outros, essenciais para um bom desempenho na OBMEP. As oficinas de Matemática ocorrem nas dependências do Campus da UFSM em Frederico Westphalen.

A cada novo ano, os estudos voltados para a resolução de problemas matemáticos nas Oficinas de Matemática do projeto de extensão têm como objetivo aprimorar as habilidades lógicas e matemáticas dos participantes. Isso inclui interpretação, sistematização, generalização, analogia, comparação e a capacidade de aprender de maneira autônoma e colaborativa, elementos importantes na preparação para as questões discursivas da 2ª fase da OBMEP.

Assim, o projeto de extensão visa preparar os participantes das Oficinas de Matemática para obter um bom desempenho na 2ª fase da OBMEP, oferecendo prática na resolução de problemas matemáticos e/ou contextualizados, uma característica distintiva da fase avançada da competição.

Durante o desenvolvimento das atividades do projeto de extensão entre os anos de 2019 a 2022, identificou-se que a maioria dos participantes apresentava

dificuldades na resolução de questões da OBMEP relacionadas a tópicos de Geometria. Assim, com base nesse diagnóstico, foram implementadas atividades no ano de 2023 para analisar os principais erros cometidos pelos participantes do projeto de extensão ao resolver problemas das provas da OBMEP que envolvem Geometria Plana.

Desta forma, este artigo tem como objetivo identificar os erros encontrados na resolução de problemas de Geometria Plana por estudantes selecionados para a 2ª fase da prova de Nível 1 da OBMEP. Compreender os erros mais comuns cometidos pelos participantes do projeto de extensão ao enfrentar questões de Geometria cobradas na OBMEP é essencial para aprimorar tanto a preparação desses estudantes para a 2ª fase da seleção quanto o processo de ensino de Matemática.

Acredita-se que os resultados desta pesquisa possam contribuir não apenas para uma análise crítica dos desafios enfrentados pelos participantes do projeto de extensão, mas também para a implementação de estratégias de ensino mais eficazes e para a melhoria do desempenho dos estudantes na competição nacional de Matemática.

2 Fundamentação Teórica

A pesquisa apresentada neste trabalho fundamenta-se na metodologia da resolução de problemas de Polya (POLYA, 1995) e na análise dos erros cometidos pelos estudantes durante a resolução das questões de Geometria propostas nas Oficinas de Matemática do projeto de extensão que participaram em preparação para a 2ª fase da OBMEP.

2.1 A metodologia da Resolução de Problemas segundo Polya

Antes de abordar a metodologia de Polya, é relevante mencionar que Pozo e Crespo (2009, p. 51) definem tarefas que tipicamente têm um caráter rotineiro como aquelas que envolvem a prática repetitiva de procedimentos previamente ensinados. Estas consistem em exercícios nos quais os estudantes tendem a empregar técnicas simples já adquiridas, uma vez que esse tipo de tarefa não demanda planejamento, apenas a repetição de conteúdos e técnicas memorizadas. Por outro lado, quando as tarefas requerem uma prática reflexiva e estratégica, necessitando que o estudante

planeje, selecione alternativas, faça simulações e reflita sobre sua própria atividade de aprendizagem, então surgem verdadeiros problemas. Estes tipos de tarefas exigem planejamento, observação, novas estratégias e um pensamento mais crítico por parte do aluno.

A metodologia de resolução de problemas é um conjunto de estratégias orientadas que podem ser implementadas em sala de aula para encontrar a solução de problemas ou desafios exclusivamente matemáticos ou aqueles que podem estar presentes no dia a dia do estudante. Esta abordagem educacional, que visa desenvolver habilidades de pensamento crítico e resolução de problemas, está intrinsecamente ligada à resolução de problemas enquanto área de pesquisa dentro da Matemática. Esta área se dedica ao estudo dos métodos, técnicas e abordagens para resolver problemas matemáticos, desenvolvendo novas estratégias de resolução e aplicando conceitos matemáticos para resolver problemas em diversas áreas do conhecimento. Assim, tem-se que a resolução de problemas desempenha um papel fundamental tanto no ensino como na pesquisa em Matemática.

O matemático e professor-pesquisador George Polya (1995) argumenta que existem quatro etapas distintas para a resolução de um problema:

- 1) *Compreensão do Problema*: É crucial entender completamente o problema antes de resolvê-lo. Isso envolve identificar as informações fornecidas, estabelecer o que se procura encontrar e compreender as restrições ou condições envolvidas.
- 2) *Elaboração de um Plano*: Após entender o problema, é necessário desenvolver uma estratégia para sua solução. Isso pode incluir a escolha de métodos ou fórmulas relevantes, a divisão do problema em partes menores e a visualização de soluções potenciais. O objetivo é encontrar conexões entre os dados do problema (relações entre as variáveis envolvidas).
- 3) *Implementação do Plano*: Colocar o plano em prática, onde os cálculos são realizados, as fórmulas são aplicadas e os passos estabelecidos no plano são seguidos para chegar a uma solução. Pode ser necessário retornar à etapa anterior e modificar ou procurar/estabelecer um novo plano.
- 4) *Revisão e Reflexão*: Após obter uma solução, é fundamental revisar o resultado e refletir sobre o processo. Isso envolve verificar se a resposta faz sentido em relação ao problema original, identificar possíveis erros e considerar abordagens alternativas.

As quatro etapas delineadas por Polya para a resolução de problemas são fundamentais para enfrentar os desafios encontrados nas provas da OBMEP,

proporcionando aos estudantes um método sistemático para compreender, planejar e implementar soluções eficazes para os problemas matemáticos apresentados nessa olimpíada científica.

As provas da OBMEP são compostas por problemas matemáticos referentes os conteúdos dos respectivos níveis de aplicação e para resolver esses problemas, o estudante precisa de habilidades e estratégias para encontrar a solução das situações apresentadas. Essa concepção é confirmada por Trainotti, Gayeski e Nunes (2018, p. 208) quando falam que a prova da OBMEP “é elaborada com problemas matemáticos e isto é relevante, já que a resolução de problemas é de extrema importância para o desenvolvimento do raciocínio lógico, das estratégias de resolução, da autonomia e da criatividade”.

2.2 Análise de Erros

A Análise de Erros no processo de aprendizagem de Matemática tem se consolidado como uma área de pesquisa relevante, possibilitando uma compreensão mais profunda das dificuldades enfrentadas pelos estudantes e fornecendo subsídios para aprimorar a prática pedagógica. Isso leva os professores a questionarem seus métodos de ensino e avaliação.

Souza (2002, p. 137) ratifica essa ideia ao mencionar que, no decorrer do processo educacional, fazer a análise dos erros auxilia o docente a concluir que a estratégia de ensino adotada se revela parcialmente ou totalmente inadequada, exigindo ser reformulada por meio de novas medidas metodológicas e pedagógicas. No contexto da aprendizagem, de acordo com Souza (2002, p. 137), a análise dos erros serve como uma ferramenta de conscientização. Ela proporciona ao estudante a chance de reavaliar suas ações, estratégias e percurso em direção a um resultado considerado inadequado. Isso permite uma compreensão do próprio equívoco e, conseqüentemente, a possibilidade de reiniciar o processo de construção do conhecimento. Já Fuck (2013) sugere que a Análise de Erros é uma ferramenta valiosa também para o aprimoramento do ensino de Geometria, promovendo uma compreensão mais profunda dos conceitos e facilitando o processo de aprendizagem dos estudantes:

[...] pode-se destacar a importância da Análise de Erros como uma metodologia de ensino e pesquisa para o professor de Matemática. Analisar

os erros dos estudantes possibilita ao docente compreender o seu raciocínio e identificar os obstáculos que o impediram de chegar à resposta correta.

A identificação desses obstáculos, por sua vez, pode auxiliar o professor a definir estratégias mais adequadas para orientar o desenvolvimento de capacidades cognitivas que o estudo da Geometria proporciona. (FUCK, 2013, p. 16).

Cury (2008, p. 80) destaca que o erro não é apenas um equívoco, mas sim uma forma de conhecimento. Ele representa um tipo de saber presente na estrutura cognitiva do estudante, ainda que seja incompleto ou equivocado, e é formado a partir de experiências anteriores. Portanto, é importante desenvolver intervenções didáticas que desafiem as certezas estabelecidas, levando o estudante a questionar suas respostas e, conseqüentemente, a aprender com esse processo.

Moreira e David (2021, p. 13) também apontam que os erros podem ser resultados de vivências prévias do aluno e que apresentam um caráter sistemático e persistente. Os autores esclarecem que os erros dos estudantes, antes de se reduzirem a uma simples manifestação de desconhecimento ou de fracasso no momento de resolver um problema ou exercício matemático, podem ser entendidos como um indicador didático-pedagógico, uma vez que são peças fundamentais no trabalho de planejamento das atividades de ensino escolar.

Neste artigo busca-se empregar a metodologia de análise de erros com o objetivo de identificar lacunas de aprendizagem e áreas de maiores dificuldades apresentadas pelos estudantes, visando promover uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos e uma aprendizagem mais significativa e duradoura.

Segundo Cury (2008, p. 91), a análise dos erros na resolução de problemas matemáticos por estudantes é um campo de pesquisa fértil no Brasil, com diversas pesquisas buscando classificar e compreender as origens desses erros. A categorização dos erros permite identificar as dificuldades mais frequentes enfrentadas pelos alunos, fornecendo subsídios para o desenvolvimento de intervenções didáticas mais eficazes.

O Quadro 1 apresenta as principais categorias de erros que podemos encontrar nas pesquisas brasileiras sobre análise de erros:

Quadro 1: Tipos de erros de estudantes apontados nas pesquisas brasileiras

Tipo de erro	Principais Características
1. Erros conceituais	- Falta de compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos no problema; - Aplicação inadequada de fórmulas e algoritmos; - Dificuldades na manipulação de símbolos matemáticos.

2. Erros procedimentais	- Cálculos incorretos; - Desorganização nas etapas de resolução do problema; - Falta de atenção aos detalhes.
3. Erros de interpretação	- Dificuldade na leitura e compreensão do enunciado do problema; - Identificação incorreta das informações relevantes; - Interpretação errônea dos dados presentes no problema.
4. Erros de linguagem	- Dificuldade na comunicação dos resultados da resolução do problema; - Utilização inadequada da terminologia matemática; - Resposta incompleta ou inconsistente.

Fonte: Dullius, Quartieri e Furlanetto (2012, p. 02)

Vale ressaltar que a classificação dos erros não é um processo estanque, e muitas vezes um mesmo erro pode se encaixar em mais de uma categoria. Além disso, é importante considerar que os tipos de erros mais frequentes podem variar de acordo com o nível de ensino, o conteúdo matemático em estudo, o problema sob análise e as características cognitivas de cada aluno ou grupo deles.

3 Metodologia

A investigação realizada nessa pesquisa tem caráter qualitativo, uma vez que ela é uma abordagem metodológica que busca compreender e interpretar os fenômenos relacionados à aprendizagem de tópicos da geometria plana, explorando os erros dos participantes envolvidos.

De acordo com Gil (2021), este trabalho é classificado como pesquisa qualitativa básica, uma vez que há também as pesquisas que, embora não podendo ser definidas como narrativas, fenomenológicas, etnográficas, nem como estudos de caso ou teorias fundamentadas nos dados, procuram descobrir ou compreender fenômenos, processos ou perspectivas das pessoas envolvidas.

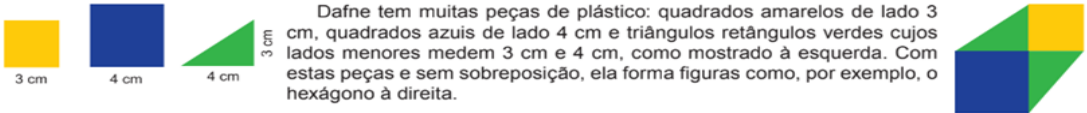
Durante as oficinas semanais realizadas no Campus da UFSM em Frederico Westphalen, os estudantes se dedicavam à resolução de problemas da OBMEP. Primeiro, eles trabalhavam de forma individual para resolver as questões. Em seguida, participavam de discussões coletivas para revisar e analisar as soluções propostas. Essas atividades foram conduzidas como parte do projeto de extensão universitária intitulado "Ampliando Caminhos do Conhecimento pela OBMEP".

Para elaborar a proposta aqui apresentada, foram analisadas as respostas e os erros cometidos pelos estudantes do Nível 1 que participaram do projeto de extensão em 2023. Durante uma das oficinas do projeto, eles resolveram um problema matemático de Geometria Plana retirado da prova da OBMEP de 2013, 2ª fase, Nível

1, que abordava conceitos relacionados a medidas de comprimento e áreas de quadrados e triângulos. O enunciado do problema está detalhado na Figura 1. Naquela ocasião, vinte e sete estudantes entregaram individualmente suas resoluções escritas à mão, sem que tenham consultado qualquer material.

Figura 1: Problema aplicado

Dafne tem muitas peças de plástico: quadrados amarelos de lado 3 cm, quadrados azuis de lado 4 cm e triângulos retângulos verdes cujos lados menores medem 3 cm e 4 cm, como mostrado à esquerda. Com estas peças e sem sobreposição, ela forma figuras como, por exemplo, o hexágono à direita.



a) Qual é a área do hexágono que Dafne formou?

b) Usando somente peças quadradas, Dafne formou a figura ao lado, com um buraco em seu interior. Qual é a área do buraco?



c) Mostre como Dafne pode preencher, sem deixar buracos, um quadrado de lado 15 cm com suas peças, sendo apenas uma delas um quadrado de lado 3 cm.



d) Explique por que Dafne não pode preencher um quadrado de lado 15 cm sem usar pelo menos um quadrado de lado 3 cm.

Fonte: Prova da OBMEP, 2ª Fase, Nível 1, 2013.

Neste artigo, a classificação desses erros deu-se a partir dos tipos definidos no trabalho de Dullius, Quartieri e Furlanetto (2012, p. 75):

A) Erros de interpretação do enunciado: ocorrem quando o estudante seleciona os dados, mas não compreende completamente o que o problema solicita em relação a eles;

B) Erros por falhas em uma etapa do procedimento: acontecem quando os dados e operações são selecionados corretamente, mas há um pequeno descuido em uma etapa do processo de resolução;

C) Erros devido a associações incorretas: surgem quando são aplicadas operações a dados incorretos ou irrelevantes, tanto os fornecidos no enunciado quanto outros;

- D) Erros por necessidade de formalização (utilização de fórmulas): ocorrem quando os estudantes dependem excessivamente do cálculo formal, usando expressões com incógnitas para resolver a questão;
- E) Respostas isoladas: quando apenas a resposta final é apresentada, sem o desenvolvimento da resolução;
- F) Sem resposta; e ainda,
- G) Outros: quando não é possível identificar o tipo específico de erro cometido.

Após definir as categorias, as respostas dos estudantes foram analisadas, classificando cada tipo de erro observado.

No encontro da semana seguinte à resolução do problema, após a correção pela equipe docente responsável pelo projeto de extensão, foram realizadas discussões com os estudantes sobre os conteúdos abordados no problema (Figura 1), sua resolução e a correção dos erros cometidos durante o processo, fornecendo assim um feedback aos participantes das oficinas.

4 Proposta de resolução do problema aplicado

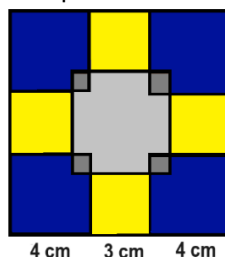
Assim como as provas, a resolução dos problemas nelas contidos (e o gabarito) também é disponibilizado no site da OBEMP para que os professores e estudantes possam ter acesso a este material, tanto no caso de dúvidas, quanto no caso de análise de outras alternativas possíveis de resolução.

No caso do problema da Figura 1, a resolução apresentada começa destacando que cada uma das peças amarelas tem área $3 \times 3 = 9 \text{ cm}^2$, as azuis têm $4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$ e as verdes têm $\frac{3 \times 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$.

Na questão (a), o hexágono montado por Dafne compõe-se de duas peças verdes, uma amarela e uma azul. Portanto, sua área é igual a $2 \times 6 + 9 + 16 = 37 \text{ cm}^2$

Já na questão (b), a figura construída por Dafne (pode ser observada na Figura 2) forma um quadrado de lado $4 + 3 + 4 = 11 \text{ cm}$, cuja área é $11 \times 11 = 121 \text{ cm}^2$. Ele é composto de 4 amarelas e 4 peças azuis; a área total dessas peças é $4 \times 9 + 4 \times 16 = 36 + 64 = 100 \text{ cm}^2$. A área do buraco é a área do quadrado menos a soma das áreas dessas peças, ou seja, é igual a $121 - 100 = 21 \text{ cm}^2$.

Figura 2: Figura construída por Dafne na questão (b) do problema

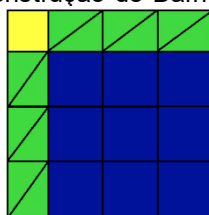


Fonte: Prova da OBMEP, 2ª Fase, Nível 1, 2013.

Alternativamente, podemos pensar no buraco (em cinza claro) como um quadrado de 5 cm de lado do qual foram retirados, nos cantos, quadradinhos de 1 cm (em cinza escuro). Nesse caso, a sua área então é $5 \times 5 - 4 \times 1 \times 1 = 25 - 4 = 21 \text{ cm}^2$.

Uma maneira possível de resolver a questão (c) é de preencher o quadrado 15 x 15 como pedido é mostrado na Figura 3.

Figura 3: Possibilidade de construção de Dafne na questão (c) do problema



Fonte: Autores do artigo.

Na questão (d), começamos analisando que um quadrado de lado 15 cm tem $15 \times 15 = 225 \text{ cm}^2$; observamos que 225 é um número ímpar. A peça azul (quadrado) tem área 16 cm^2 e a verde (triângulo retângulo) tem área 6 cm^2 , ambos números pares. Logo, não é possível preencher o quadrado de lado 15 cm apenas com peças desse tipo, pois a soma de números pares é par. Segue que para preencher o quadrado de lado 15 cm com as peças do enunciado é necessário usar pelo menos uma peça amarela (quadrado com 3 cm de lado).

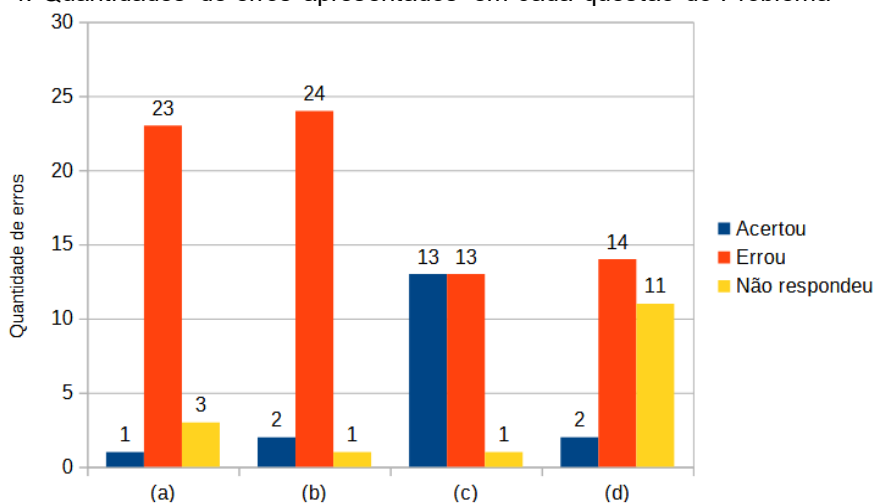
Ao resolver esse problema, o aluno poderá ter lembrado ou adquirido conhecimentos sobre: resolução de expressões numéricas, análise de características e construção de figuras geométricas planas, cálculo de área de quadrados, retângulos e triângulos retângulos, unidades de medida de comprimento e área, de raciocínio lógico e criação de estratégias para busca de (possíveis) soluções, além de verificação/confirmação destas.

5 Resultados e discussões

Na análise das resoluções feitas e escritas pelos estudantes, observou-se um número significativo de erros nas quatro questões propostas (enunciado do problema na Figura 1): (a), (b), (c) e (d). As questões (a) e (b) foram as que apresentaram mais erros, com 23 e 24 erros, respectivamente, e apenas um pequeno número de alunos conseguiu resolvê-las corretamente. Quanto à questão (c), o número de erros e acertos foi igual, enquanto na questão (d) houve um grande número de estudantes que não conseguiram resolvê-la, deixando-a sem resposta. Essa situação é ilustrada na Figura 4, que mostra a quantidade de erros presentes em cada uma dessas quatro questões do problema (Figura 1).

É importante ressaltar que os conteúdos abordados nas questões da OBMEP sobre Geometria Plana são ensinados ao longo do ano letivo na disciplina de Matemática na escola regular, e também foram revisados durante os encontros semanais das oficinas de Matemática do projeto de extensão, antes de os estudantes tentarem resolver o problema.

Figura 4: Quantidades de erros apresentados em cada questão do Problema



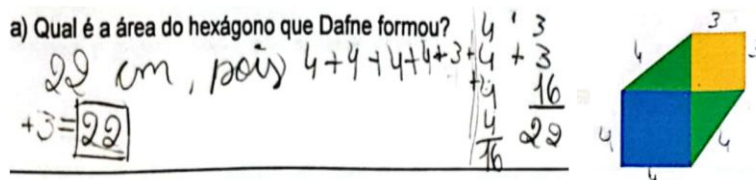
Fonte: Dados da pesquisa.

Na questão (a), foram identificados um total de 23 erros. O primeiro tipo de erro a ser analisado envolve 3 estudantes que confundiram o cálculo da área do hexágono com o cálculo do perímetro da figura apresentada.

Um dos alunos, cuja resolução está destacada na Figura 5, calculou o perímetro usando a hipotenusa do triângulo como sendo 4 cm. Mesmo que o problema

requeresse o cálculo do perímetro, o resultado ainda estaria incorreto devido às medidas consideradas. Esse equívoco pode ter ocorrido devido à falta de estudo e/ou compreensão do Teorema de Pitágoras.

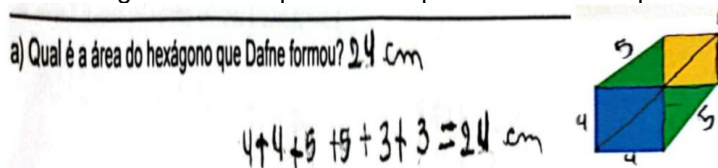
Figura 5: Resolução (errônea) apresentada por um estudante na questão (a)



Fonte: Dados da pesquisa.

Por outro lado, o estudante cuja resolução está representada na Figura 6, embora tenha cometido um erro ao calcular o perímetro em vez da área da figura hexagonal, utilizou corretamente o valor da hipotenusa dos triângulos verdes, que realmente era de 5 cm (embora não tenha apresentado este cálculo por escrito).

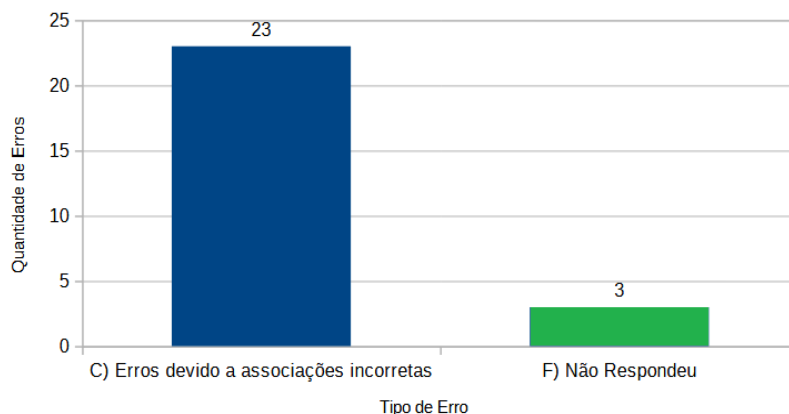
Figura 6: Erro apresentado por estudante na questão (a)



Fonte: Dados da pesquisa.

No gráfico da Figura 7, estão representados todos os erros dos estudantes na questão (a) do problema, categorizados de acordo com Dullius, Quartieri e Furlanetto (2012, p. 75). Esses erros, decorrentes de associações incorretas, podem surgir de uma interpretação equivocada das informações fornecidas no problema, levando a associações inadequadas entre as variáveis envolvidas. Por exemplo, um estudante pode erroneamente aplicar uma fórmula geométrica a dados que não se relacionam diretamente com o problema em questão, resultando em resultados imprecisos ou incorretos.

Figura 7: Classificação dos erros na questão (a)



Fonte: Dados da pesquisa.

Essa falta de discernimento pode ser causada por diversos fatores, como falta de prática na aplicação de conceitos geométricos, falta de compreensão dos requisitos específicos do problema ou até mesmo confusão sobre a formulação do enunciado. É fundamental que o estudante desenvolva habilidades de análise crítica e interpretação cuidadosa dos problemas, a fim de evitar esses tipos de erros e melhorar sua proficiência em Geometria Plana.

Além dos erros já apresentados anteriormente, tem-se também o caso de 7 estudantes que consideraram o cálculo da área do triângulo como sendo igual ao cálculo da área de um retângulo, e que por isso erraram a questão, como pode ser observado em alguns exemplos esboçados na Figura 8.

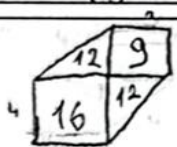
Figura 8: Erros cometidos por três estudantes na questão (a)

a) Qual é a área do hexágono que Dafne formou?

$3 \times 3 = 9$ $4 \times 4 = 16$ $4 \times 3 = 12 \times 2 = 24$ $9 + 16 + 24 = 49$ 49 cm^2 de área

a) Qual é a área do hexágono que Dafne formou?

A área é de 49 cm^2 .

 $9 + 16 + 24 = 49 \text{ cm}^2$

a) Qual é a área do hexágono que Dafne formou? 49 cm^2

Passo descobrimos isso. Precisamos saber a área de cada peça. O quadrado amarelo tem 3cm de lado, sendo assim $3 \times 3 = 9 \text{ cm}^2$ e fazemos o mesmo com o quadrado azul e o triângulo vermelho de 4cm e 3cm em sua base e altura para o hexágono e vemos que a soma de cada um sendo assim damos a soma $9 + 16 + 24 = 49 \text{ cm}^2$

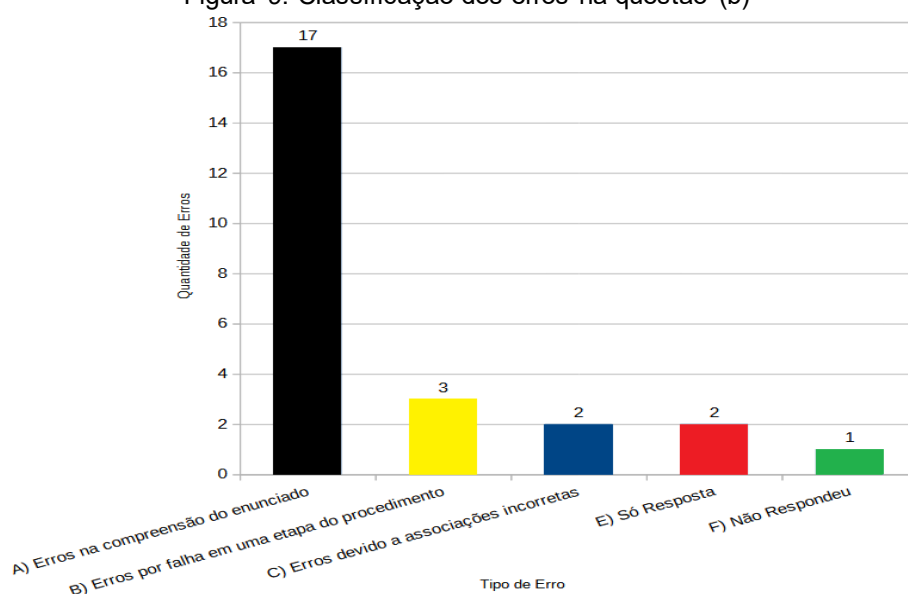
Fonte: Dados da pesquisa.

Na questão (b), os estudantes foram solicitados a calcular a área do buraco na figura composta por quadrados amarelos e azuis. Dentre os participantes, apenas 2 responderam corretamente, enquanto 24 erraram e 1 não respondeu, conforme ilustrado na Figura 4.

É relevante ressaltar que, nas resoluções dos 2 estudantes que acertaram, foi observado um erro relacionado à unidade apresentada na resposta: no primeiro caso, o estudante utilizou a unidade de comprimento (cm) em vez da unidade de área (cm^2); o segundo estudante apresentou a solução em metros quadrados em vez de centímetros quadrados, uma vez que a unidade mencionada nas medidas das figuras do problema era o centímetro.

Na Figura 9, os erros dos estudantes na questão (b) foram classificados de acordo com Dullius, Quartieri e Furlanetto (2012, p. 75).

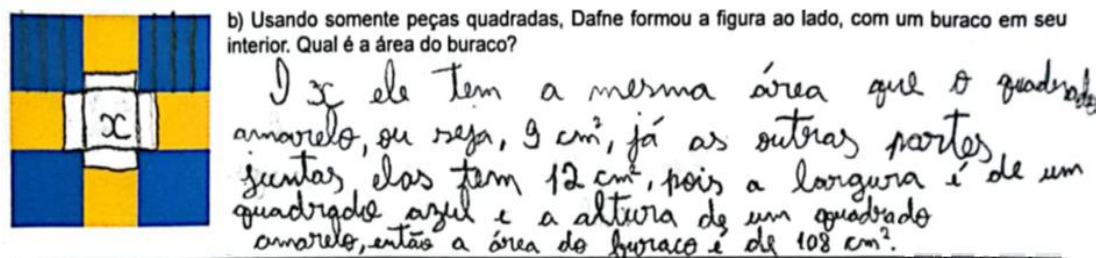
Figura 9: Classificação dos erros na questão (b)



Fonte: Dados da pesquisa.

Na questão (b), merece destaque o caso de um estudante que calculou corretamente as áreas internas do buraco. No entanto, em vez de somar essas áreas obtidas, ele as multiplicou, resultando em um erro por falha em uma etapa do procedimento de resolução. Essa situação pode ser verificada na Figura 10.

Figura 10: Erro por falha em uma etapa de resolução na questão (b)



Fonte: Dados da pesquisa.

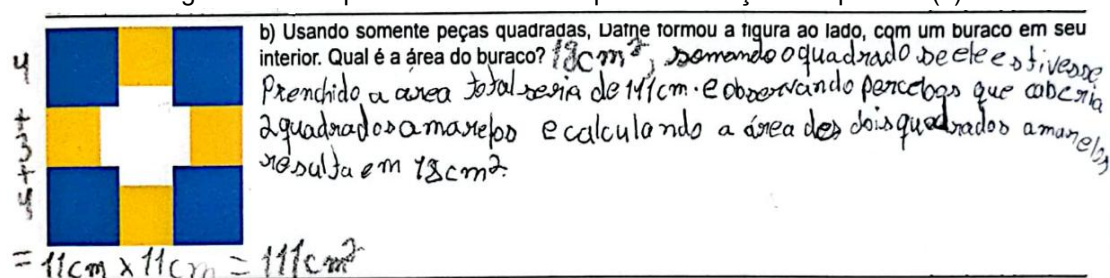
Os erros por falha em uma etapa de resolução podem ter sido cometidos pelos 3 estudantes na questão (b) devido a uma série de razões. Uma delas pode ser a falta de compreensão completa dos conceitos ou métodos necessários para resolver o problema proposto. Possivelmente, eles não assimilaram completamente as propriedades geométricas relevantes ou não praticaram o suficiente para internalizar os procedimentos adequados.

No contexto da Geometria Plana, também é possível que não tenham analisado completamente a figura formada na proposta de resolução.

Além disso, distrações ou falta de concentração durante a resolução do problema podem levar a erros inadvertidos. A pressão do tempo ou a ansiedade também podem desempenhar um papel significativo, levando o estudante a cometer equívocos mesmo quando realmente conhece o conteúdo. É importante que ele reconheça essas possíveis causas de erro e busque estratégias para superá-las, como revisão adicional, prática cuidadosa e gerenciamento eficaz do tempo e do estresse durante as avaliações e resolução de problemas.

Um outro exemplo de erro na questão (b) por falha em uma etapa do procedimento de resolução foi cometido por um estudante que considerou preencher o buraco com dois quadrados amarelos, mas não percebeu que ainda seria necessário um retângulo adicional com área de 1 cm x 3 cm. Esta referida resolução pode ser observada na Figura 11.

Figura 11: Erro por falha em uma etapa da resolução na questão (b)



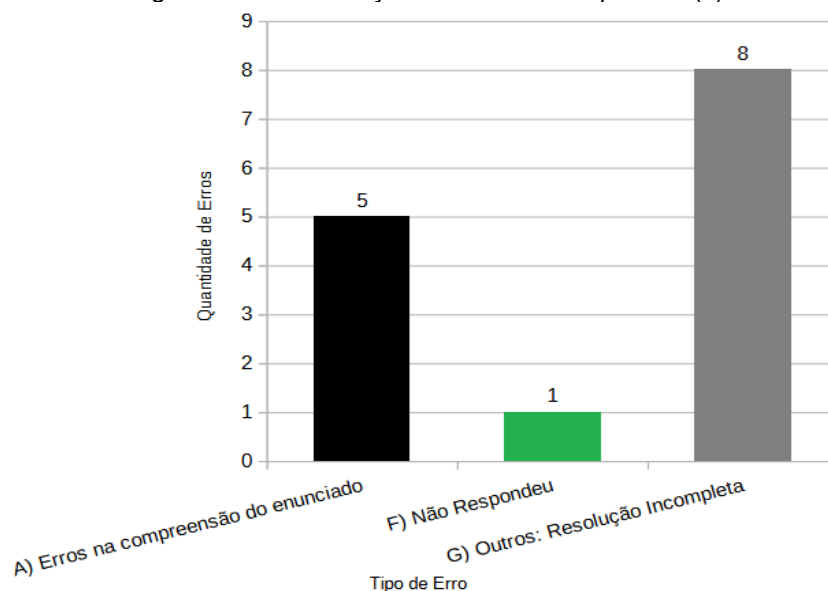
Fonte: Dados da pesquisa.

Esse tipo de erro pode ter ocorrido pelo fato de o estudante não ter elaborado um plano adequado para resolver o problema e/ou não ter implementado ou ainda modificado o plano de forma a obter a solução do mesmo.

Podemos notar que quando as etapas definidas por Polya (1995) para a resolução de um problema não são respeitadas ou quando o aluno não coloca todas elas em prática, erros podem acontecer como consequência.

A Figura 12 mostra o gráfico com as classificações e quantitativos dos erros da questão (c), os quais também estão considerando o trabalho de Dullius, Quartieri e Furlanetto (2012, p. 75).

Figura 12: Classificações dos erros na questão (c)

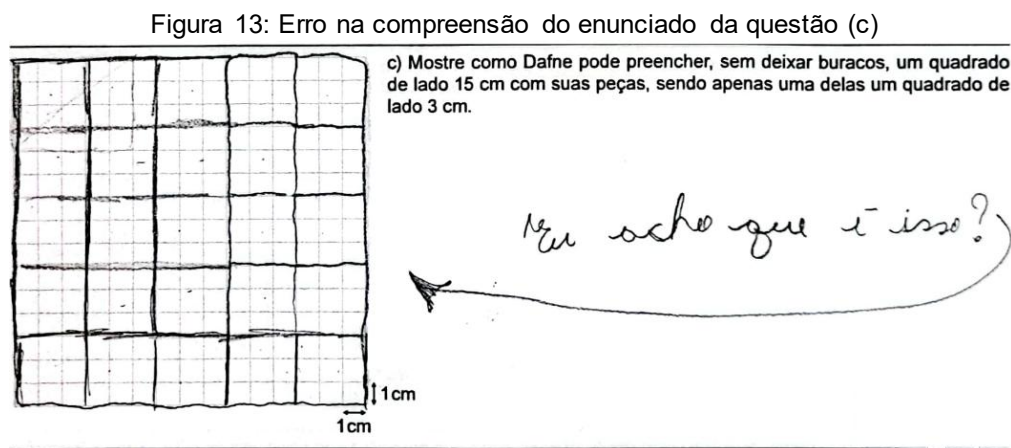


Fonte: Dados da pesquisa.

Observou-se que, embora na questão (c) do problema tenha sido registrado o maior número de alunos que acertaram (13), também foi constatado o mesmo número (13) de alunos que erraram. Estes não compreenderam totalmente ou parcialmente o

que foi solicitado no enunciado, ou ainda apresentaram uma proposta de resolução incompleta, o que não permite concluir que eles tenham entendido o que foi solicitado. Apenas 1 aluno não apresentou nenhuma resposta, seja escrita ou desenho no espaço disponibilizado para a resolução.

Entre os erros dos alunos, classificáveis como erro na compreensão do enunciado, houve o caso de 1 estudante que utilizou apenas o quadrado amarelo de lado 3 cm. Isso indica que o aluno não compreendeu a parte do enunciado da questão (c) que afirmava: "sendo apenas uma delas um quadrado de lado 3 cm". Essa situação pode ser observada na Figura 13.

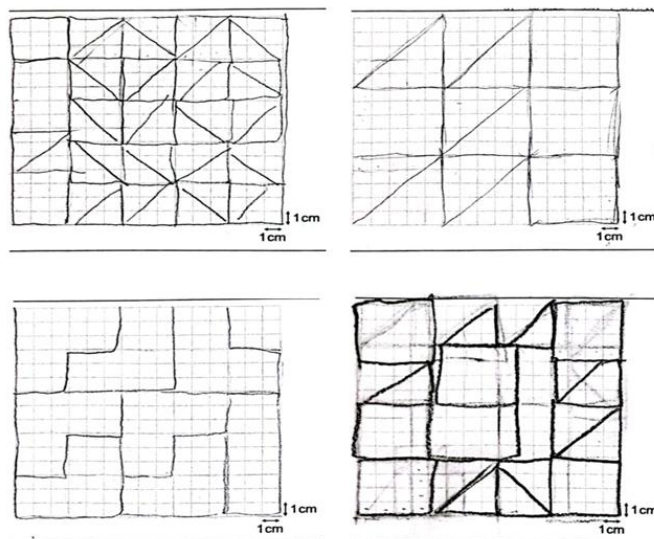


Fonte: Dados da pesquisa.

Novamente, neste tipo de erros, podemos observar que houve falha na implementação de uma ou mais etapas para resolução do problema definidas por Polya (1995). Uma falha na primeira etapa (compreensão do problema) pode ter ocasionado os erros, uma vez que compreender integralmente o enunciado do problema é fundamental antes de solucioná-lo, implicando na identificação dos dados apresentados, determinação do objetivo almejado e entendimento das limitações ou circunstâncias envolvidas.

Nessa mesma questão (c) foram também observados os erros de 4 estudantes que utilizaram figuras com dimensões diferentes das especificadas no enunciado do problema. Isso pode ser constatado nas imagens da Figura 14.

Figura 14: Erros na compreensão do enunciado da questão (c)

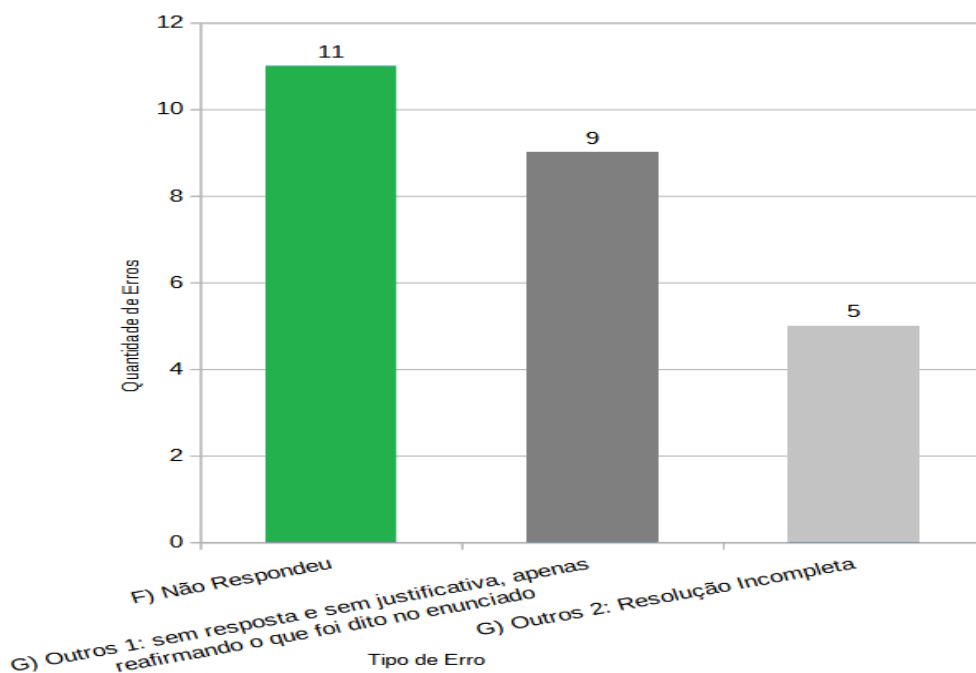


Fonte: Dados da pesquisa.

Dentre as causas que podem ser apontadas pelo fato de um estudante não conseguir completar a resolução de um problema, destacam-se: uma compreensão incompleta dos conceitos geométricos necessários, falta de prática na aplicação desses conceitos, confusão sobre a estratégia correta para resolver o problema, distrações durante a resolução ou simplesmente falta de tempo para concluir todas as etapas necessárias. Essas dificuldades ressaltam a importância da revisão constante, prática ativa e busca de ajuda, tanto do professor quanto dos colegas, quando necessário, para melhorar a capacidade de resolver problemas matemáticos.

Na Figura 15, são quantificados os erros associados à questão (d), os quais também foram classificados conforme Dullius, Quartieri e Furlanetto (2012, p. 75). A análise do gráfico, em comparação com as demais questões, revela um aumento no número de alunos que deixaram a questão em branco, seja por dificuldades de compreensão do enunciado, seja por falta de habilidade para resolver o problema, mesmo possivelmente compreendendo-o.

Figura 15: Erros cometidos pelos alunos na questão (d) do Problema 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Nesta questão, houve 9 estudantes que erraram por não fornecerem uma resposta adequada à pergunta, limitando-se a reafirmar o que foi mencionado no enunciado do problema. Esses erros estão detalhados no Quadro 2.

Quadro 2: Erros na questão (d), sem justificativa, apenas com reafirmação do enunciado

Erro apresentado na questão (d), sem justificativa, apenas reafirmando o que foi dito no enunciado
pois sempre iria faltar um espaço que só caberia o quadrado de 3 cm.
Porque senão ela não ia conseguir fechar, podemos usar várias formas e muitos precisam do quadrado 3x3.
Porque os outros quadrados e triângulos se usasse só eles, muito provavelmente ia sobrar espaço, sendo que não pode sobrar, e quando usamos ele, obteremos um quadrado perfeito, e ainda vai estar que nem pediram.
usando 9 quadrados de 4cm, 12 triângulos retângulos de 3cm e 4cm, sobra somente espaço para o quadrado de 3cm.
Porque todos os triângulos retângulos não um não podem, e para fechar o quadrado de 15 cm o quadrado de 3 cm não vai servir para "mudar".

Pois não vai caber nenhuma outra peça
Porque o quadrado nunca será perfeito com os lados iguais.
Pois sempre vai sobrar um espaço que as outras formas não poderão completar. Mas ao colocar as formas nos lugares corretos sobrará exatamente um espaço certo para o quadrado de 3 cm.
Porque, na simplificação do quadrado 15 por 15, se simplificar 5 vezes, vai ter como resultado um quadrado de 3 por 3

$$\frac{15}{15 \div 5} = \frac{3}{3}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Os erros apresentados pelos alunos revelaram uma interpretação limitada ou equivocada do problema proposto. Em vez de fornecerem uma explicação adequada para a impossibilidade de preencher um quadrado de lado 15 cm sem utilizar um quadrado de lado 3 cm, os alunos simplesmente repetiram o enunciado do problema de maneiras diversas, sem desenvolverem uma compreensão mais profunda dele. Muitas respostas se limitaram a afirmar que faltaria espaço para o quadrado de 3 cm, sem explicar como essa falta de espaço ocorre ou por que outras peças não podem preenchê-lo. Além disso, há confusões conceituais, como a ideia de que todos os triângulos seriam maiores e o conceito incorreto de que um quadrado nunca pode ser perfeito com lados iguais. Observa-se que os alunos falharam em fazer uma análise coerente do problema, demonstrando dificuldade em aplicar conceitos matemáticos e raciocínio lógico na resolução do problema.

O Quadro 3 apresenta outros 5 estudantes expuseram resolução incompleta para a questão, pois não especificaram como preencher todos os lados do quadrado com base nas subdivisões de 15 cm em medidas de 4 cm e 3 cm.

Quadro 3: Erros na questão (d), com resolução incompleta

Erro apresentado na questão (d), com resolução incompleta para a questão, pois não especificaram como preencher todos os lados do quadrado
Pois 15 não é múltiplo de 4, logo, quadrados de lado 4 cm e triângulos de base 4 cm não preencheriam um quadrado de lado 15 cm.

porque algum lado não tem 4 cm e 4 não é divisor de 15.
Porque tem 2 triângulos, eles medem a 4 cm então $2 \times 4 = 8$ + os 4 cm do quadrado grande da $12 + 3$ cm do quadrado pequeno = 15 cm e sem ele não chegamos no 15 cm.
Pq é necessário ele ficar em alguma parte para fechar o canto como na figura acima
Pois 3 é <u>divisor</u> e <u>múltiplo</u> de 15

Fonte: Dados da pesquisa.

Os erros apresentados pelos alunos no Quadro 3 revelam diferentes níveis de compreensão do problema. No primeiro caso, o estudante menciona a não divisibilidade de 15 por 4, mas falha em explicar como isso impede o preenchimento do quadrado maior sem usar quadrados menores. Esta resposta carece de uma conexão clara entre a não divisibilidade e a impossibilidade de preenchimento. No segundo caso, embora o estudante identifique a falta de divisibilidade de 4 em 15, a explicação é vaga e não demonstra uma compreensão completa do problema. O terceiro estudante mostra alguma compreensão ao reconhecer a necessidade de preencher o espaço restante após utilizar os triângulos, mas comete um erro na contagem, não considerando completamente a área total. O quarto estudante parece entender a necessidade de preencher o canto, mas sua explicação carece de detalhes sobre como isso afeta a possibilidade de preencher o quadrado maior sem usar quadrados menores. Já o último estudante confunde conceitos, ao mencionar que 3 é divisor e múltiplo de 15, o que não é relevante para a resolução do problema. Em resumo, os erros refletem uma falta de compreensão completa do problema, incluindo a relação entre divisibilidade, área e preenchimento do espaço.

6 Considerações finais

Acreditamos que trabalhar no contexto escolar com a metodologia de resolução de problemas, utilizando questões das provas da OBMEP, representa uma estratégia de ensino eficaz para promover uma aprendizagem matemática mais significativa e estimulante. Ao enfrentarem desafios matemáticos do cotidiano e problemas elaborados que demandam estratégias e raciocínio lógico, os estudantes

desenvolvem habilidades cognitivas, socioemocionais e metacognitivas essenciais para seu desenvolvimento integral. Portanto, é fundamental que escolas, professores de Matemática e gestores educacionais valorizem e fomentem práticas que estimulem a resolução de problemas matemáticos, como os encontrados nas questões da OBMEP, e incentivem a participação em competições olímpicas como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Nesse contexto, é relevante destacar o engajamento colaborativo da equipe executora do projeto de extensão do Campus da UFSM em Frederico Westphalen/RS, que há mais de cinco anos consecutivos vem desempenhando um papel crucial na promoção dessas iniciativas na comunidade regional de abrangência da Instituição.

Por conseguinte, ter realizado uma atividade de análise dos erros cometidos pelos participantes do projeto de extensão ao resolverem um problema de questão descritiva de uma prova da OBMEP foi extremamente relevante.

Ao concluir a análise dos erros apresentados pelos estudantes na resolução do problema considerado (Figura 1), observa-se que uma variedade de fatores pode ter contribuído para o alto número de respostas incorretas, respostas incompletas e sem respostas. Estes incluem: falta de compreensão dos conceitos geométricos necessários, falta de prática na aplicação desses conceitos, interpretação inadequada das instruções do problema, nervosismo durante a realização da atividade e falta de tempo suficiente para reflexão sobre o enunciado.

Além disso, a dificuldade das questões pode ter sido superior ao nível de habilidade dos estudantes. Esses aspectos destacam a importância de uma preparação abrangente, tanto individual quanto em grupo, focada na resolução de problemas, junto a uma prática contínua, para enfrentar os desafios matemáticos apresentados em olimpíadas científicas, como a OBMEP. Esses esforços são essenciais para capacitar os estudantes a enfrentarem desafios matemáticos com confiança e competência, preparando-os para futuras trajetórias educacionais e profissionais.

Pensa-se que ao analisar os erros cometidos por estudantes ao resolverem problemas matemáticos, os professores (para além dos responsáveis por esta pesquisa) podem identificar lacunas no entendimento dos conceitos, padrões de erro recorrentes e áreas que necessitam de mais atenção. Essa análise possibilita que educadores e instituições de ensino identifiquem as áreas mais comuns de erro entre os estudantes e desenvolvam estratégias de ensino de Matemática específicas para

abordar esses pontos fracos. Isso permite que os educadores busquem ajustar suas práticas de ensino, oferecendo apoio personalizado e estratégias de aprendizagem direcionadas para ajudar os alunos a superarem suas dificuldades e aprimorar suas habilidades matemáticas.

Assim, no âmbito desta pesquisa, acredita-se que, tendo conhecido os resultados da análise dos erros na resolução de questões envolvendo Geometria Plana e integrados tais aspectos na preparação dos estudantes nas Oficinas de Matemática para a OBMEP, obteve-se um avanço significativo na melhoria do desempenho e na promoção de uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. Ao reconhecer e abordar os equívocos frequentes cometidos pelos estudantes, foi possível durante as Oficinas de Matemática ajustar as abordagens de ensino, adaptando-as às necessidades individuais dos estudantes.

Destacamos também a necessidade de se verificar os conhecimentos prévios dos estudantes a respeito do problema/exercício a ser trabalho durante as oficinas. Ausubel, Novak e Hanesian (1980) ressaltam a importância da verificação dos conhecimentos prévios dos estudantes antes da aplicação de problemas matemáticos como uma estratégia essencial para evitar a ocorrência e perpetuação dos mais diversos erros. Segundo os autores, compreender as concepções prévias dos alunos é fundamental para uma aprendizagem significativa, pois permite ao professor adaptar sua abordagem de ensino às necessidades individuais de cada estudante. Ao identificar e corrigir lacunas ou equívocos nos conhecimentos pré-existentes, os educadores podem proporcionar uma base sólida para o desenvolvimento de novas habilidades matemáticas, garantindo assim uma aprendizagem mais eficaz e duradoura.

Ainda, ao aprender com seus erros e refletir sobre suas estratégias, os participantes do projeto não apenas aprimoraram seu desempenho na OBMEP, mas também cultivaram uma mentalidade de aprendizado contínuo que será valiosa em suas jornadas futuras. E assim, nesta pesquisa, a análise de erro tornou-se uma ferramenta valiosa para maximizar os benefícios da metodologia de resolução de problemas e também para contribuir para o sucesso dos estudantes na aprendizagem da matemática.

Referências

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Coleção Tendências em Educação Matemática. 1ª Edição, 1ª Reimpressão. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

DULLIUS, M.M.; QUARTIERI, M. T.; FURLANETTO, V. Análise e classificação de erros na resolução de uma prova de Olimpíada Matemática. **UNIÓN – Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. Dezembro de 2012, Número 32, p. 71-84.

FUCK, R. S. Análise de erros em Geometria: uma investigação com alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA). **Revista de Ensino de Ciências e Matemática - REnCiMa**, v. 4, n. 2, p. 16–36, 2013.

GIL, A. C. **Como fazer pesquisa qualitativa**. 1ª edição. Barueri: Atlas, 2021.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **Formação matemática do professor**: Licenciatura e prática docente escolar. Coleção tendências em educação matemática. 3ª edição. Belo Horizonte: Grupo Autêntica, 2021.

OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Regulamento da 19ª Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas - OBMEP 2024.

OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Prova de nível 1. Ano 2013.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. 2ª reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POZO, J. I.; CRESPO, M. A. G. **A aprendizagem e o ensino de ciências**: do conhecimento cotidiano ao conhecimento científico. 5ª edição. Porto Alegre: Artmed, 2009.

SOUZA, S. **Erros em Matemática**: um estudo diagnóstico com alunos de 6ª série do Ensino Fundamental. Dissertação. Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de Marília, 2002.

TRAINOTTI, A.; GAYESKI, R. G.; NUNES, L. N. O conteúdo de estatística nas provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das escolas públicas (OBMEP). **Revista de Ensino de Ciências e Matemática - REnCiMa**, v. 9, n. 2, p. 193–209, 2018.