EDUCAÇÃO & realidade

A Resolução de Problemas de Produto Cartesiano por Alunos do Ensino Fundamental

Sandra Maria Pinto Magina[I]
Alina Galvão Spinillo[II]
Lianny Milenna de Sá Melo[II, III]

[I]Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilhéus/BA – Brasil
[II]Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife/PE – Brasil
[III]Centro de Referência de Assistência Social de Ipojuca (CRAS), Ipojuca/PE – Brasil

RESUMO – A Resolução de Problemas de Produto Cartesiano por Alunos do Ensino Fundamental. O estudo investigou a resolução de problemas de produto cartesiano diretos (requer a multiplicação para sua resolução) e inverso (requer a divisão para sua resolução) por alunos do Ensino Fundamental, examinando o nível de complexidade deles e os procedimentos adotados por esses alunos em função do tipo de problema. Solicitou-se que 269 alunos do 3º ao 5º ano, entre 8 e 10 anos, resolvessem um problema de produto cartesiano direto e outro inverso. Como esperado, o problema inverso foi o mais difícil. As estratégias mostraram que os níveis de raciocínio combinatório variavam em função do tipo de problema. Observou-se uma progressão no processo de resolução de problemas de produto cartesiano diretos, mas não nos inversos.
Palavras-chave: **Resolução de Problemas. Produto Cartesiano. Ensino Fundamental.**

ABSTRACT – Problems of Cartesian Product Solved by Elementary School Students. The study investigated the solution of direct (which requires multiplication for its resolution) and inverse (which requires division for its resolution) Cartesian product problems by elementary education students, examining the level of problem complexity and the children procedures according to the type of problem. A total of 269 8 and 10 year-old students attending from 3rd to 5th grade, were asked 8 and 10 years to solve direct and inverse Cartesian product problems. As expected, the inverse problem was the most difficult one. The strategies showed that levels of combinatorial reasoning vary according to the type of problem. It was also found a progression in the solution of direct Cartesian product problems, but not in relation to the solution of inverse problems.
Keywords: **Problem Solving. Cartesian Product Problems. Elementary Education.**

http://dx.doi.org/10.1590/2175-623664750

Introdução

A Combinatória constitui um dos núcleos da Matemática discreta e parte importante da Probabilidade. Historicamente, é conhecida como a arte de enumerar os objetos de um determinado conjunto sem ter que contá-los (Merayo, 2001). Do ponto de vista psicológico, a Combinatória é um esquema operacional fundamental para o desenvolvimento do pensamento lógico, ou seja, um modo de raciocinar.

A relevância do raciocínio combinatório há muito foi enfatizada por Piaget (Inhelder; Piaget, 1976; Piaget; Inhelder, 1951) cujos estudos mostraram que esse raciocínio permite diferenciar o real do possível, de forma que o indivíduo se torna capaz de considerar todas as possibilidades de uma dada situação, ainda que de forma hipotética, relacionando a emergência da noção de chance à compreensão da ideia de permutação e à estimativa de probabilidade.

Do ponto de vista educacional, a Combinatória é considerada um dos mais difíceis tópicos para ensinar e para aprender (Batanero; Godino; Navarro-Pelayo, 1997; English, 1991; Fischbein; Gazit, 1988; Hadar; Hadass, 1981; Eizenberg; Zaslavsky, 2003). Apesar dessa complexidade, pesquisadores e educadores defendem a ideia de incluir esse tópico no currículo desde cedo no Ensino Fundamental (e.g., English, 1993; National Council of Teachers Of Mathematics, 2000), alguns deles ressaltam que a resolução de problemas combinatórios pode facilitar o raciocínio na resolução de problemas de modo geral (Maher; Martino, 1996; Martino; Maher, 1999; Roa; Batanero; Godino; Cañizares, 1997).

Considerando a relevância de se desenvolver o raciocínio combinatório no Ensino Fundamental, torna-se necessário conhecer os limites e as possibilidades que alunos desse segmento escolar apresentam ao resolver problemas que requerem tal raciocínio. Uma maneira de conhecer esses limites e possibilidades é investigar como esses alunos resolvem problemas combinatórios considerados menos complexos, como é o caso de problemas de produto cartesiano. Quando solucionados por meio da multiplicação, esses problemas são denominados diretos, e quando solucionados por meio da divisão, são denominados inversos. A resolução de problemas inversos é usualmente examinada em alunos em níveis de escolaridade avançado (9º ano e Ensino Médio), pouco se sabendo como crianças alunas de anos mais iniciais do Ensino Fundamental solucionam tais problemas. A literatura mostra também que os problemas diretos são mais fáceis que os inversos. Essa afirmação se baseia em comparações feitas entre grupos de participantes oriundos de pesquisas distintas, e não em comparações realizadas em uma mesma investigação em que os mesmos participantes solucionam os dois tipos de problemas. Além disso, essas comparações versam sobre o número de acertos na resolução dos problemas e não sobre as estratégias adotadas, ficando em aberto a questão acerca de essas estratégias serem as mesmas nos dois tipos de problema.

A partir desses pontos, parece ser relevante estabelecer comparações entre formas de resolver problemas diretos e inversos em um mesmo grupo de estudantes, realizando comparações que envolvam não apenas o desempenho, mas também as estratégias de resolução empregadas. A análise dessas estratégias poderia fornecer informações a respeito das diferenças e semelhanças na resolução desses problemas e, em uma perspectiva de desenvolvimento, fornecer indicadores acerca dos limites e das possibilidades do raciocínio infantil neste campo do conhecimento matemático.

Com vistas a examinar essas questões, a presente pesquisa foi conduzida, em que alunos do Ensino Fundamental resolvem problemas de produto cartesiano direto e inverso, sendo suas estratégias de resolução analisadas em uma perspectiva de desenvolvimento. Antes, porém, de apresentar o estudo propriamente dito, cabe tecer considerações sobre os principais alicerces teóricos que o fundamentam.

Os Problemas de Produto Cartesiano

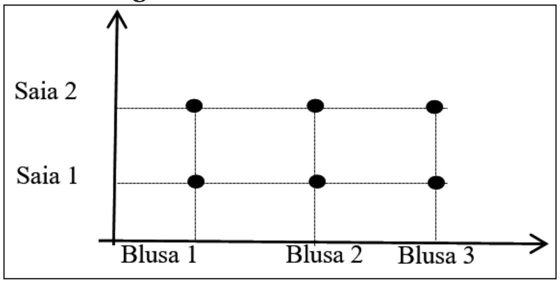
De acordo com Vergnaud (2009), os problemas de combinatória, assim como problemas de volume e área, estão inseridos nos problemas por ele denominados de produto de medidas, que fazem parte do campo conceitual das estruturas multiplicativas (Vergnaud, 1990, 1998). Dentre os problemas de combinatória – arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano (ver Pessoa; Borba, 2009), esses últimos são os menos complexos e mais investigados em pesquisas com crianças. Esses problemas se configuram como uma combinação entre elementos de dois ou mais conjuntos distintos, formando-se um novo conjunto, sendo a tabela cartesiana de dupla entrada sua forma mais usual de representação. Essa relação também é representada pela *árvore de possibilidades* que consiste em um diagrama que facilita a resolução de problemas deste tipo (Azevedo; Borba, 2013a, 2013b; Fischbein; Gazit, 1988; Fischbein; Pampu; Mînzat, 1970).

Problemas de produto cartesiano envolvem formas de resolução que requerem a multiplicação ou a divisão. Segundo Vergnaud (1991), problemas resolvidos por meio da multiplicação são denominados *problemas diretos* e seus enunciados apresentam o valor das medidas elementares (saias, blusas, meninas, meninos), sendo requerido o valor da medida produto (trajes, pares), por exemplo: Maria tem 2 saias e 3 blusas. De quantas maneiras diferentes ela pode se arrumar? Esse problema pode ser resolvido de, pelo menos, três maneiras distintas, como mostramos a seguir:

Solução 1 – Multiplicação Direta: 2 X 3 = 6

Solução 2 – Imagem 1:

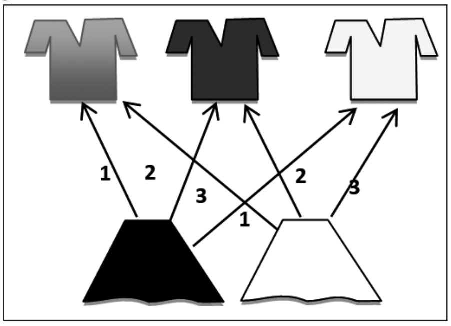
Imagem 1 – Produto Cartesiano



Fonte: Imagem elaborada pelas autoras.

Solução 3 – Imagem 2:

Imagem 2 – Árvore Icônica de Possibilidades



Fonte: Imagem elaborada pelas autoras.

Já os problemas de produto cartesiano solucionados por meio da divisão são denominados *problemas inversos* e seus enunciados apresentam o valor da medida produto e de uma medida elementar, sendo solicitado encontrar o valor da segunda medida elementar, por exemplo: Joana levou em sua mala saias e blusas que lhe permitiam formar 12 trajes diferentes. Se ela levou 3 saias, quantas blusas ela tem que ter levado para poder formas esses 12 trajes?

Resolver problemas de produto cartesiano, portanto, requer compreender que cada elemento do conjunto elementar pode aparecer em diversas combinações com elementos do outro conjunto elementar, princípio este que caracteriza a correspondência um-para-muitos (uma blusa para todas as saias). Segundo Piaget e Szeminska (1971), o esquema de correspondência se desenvolve de maneira gradual, iniciando-se com a correspondência um-para-um (ou correspondência termo a termo), avançando no sentido de incluir um esquema de correspondência um-para-muitos (ou correspondência múltipla), que é fundamental ao raciocínio multiplicativo em geral e ao raciocínio combinatório em particular.

Pesquisas mostram que crianças nos anos iniciais do Ensino Fundamental são capazes de estabelecer a correspondência um-para-muitos ao resolverem problemas de isomorfismo de medidas, porém apresentam dificuldades com problemas de produto cartesiano (e.g. Bryant; Morgado; Nunes, 1992; Fischbein; Grossman, 1997). Uma das explicações é que nos problemas de produto cartesiano a correspondência um-para-muitos não está apresentada de forma clara, como ocorre em outros problemas multiplicativos (Nunes; Bryant, 1997; Teixeira; Vasconcelos; Guimarães, 2009) e que esses problemas não apresentam estratégias evidentes de solução, provocando dúvidas em relação à forma de abordá-los (Eizenberg; Zaslavsky, 2002; 2003).

De modo geral, estudos com crianças investigam o desempenho e as estratégias de resolução em função da idade, escolaridade, rendimento escolar em Matemática e conhecimento sobre Combinatória (e.g., Teixeira; Campos; Vasconcellos; Guimarães, 2011), outros procuram traçar uma linha de desenvolvimento com o aumento da idade e da escolaridade (Moro; Soares, 2006a, 2006b; Pessoa; Borba, 2009; 2010). Identificam-se ainda pesquisas em que se compara o desempenho em diferentes tipos de problemas (e.g., Pessoa; Borba, 2008). Outras investigações exploram a compreensão acerca dos princípios que caracterizam o raciocínio combinatório em problemas de produto cartesiano (e.g., Mekhmandarov, 2000); enquanto outras examinam o papel dos suportes de representação na resolução dos problemas (English, 1991; 1992).

Analisando-se a literatura na área, verifica-se que há um maior interesse em investigar problemas de produto cartesiano que requerem a multiplicação para sua resolução (problemas diretos) do que problemas que requerem a divisão (problemas inversos). Na realidade, os problemas inversos são investigados apenas em relação a uma escolaridade adiantada, como no estudo de Azevedo, Araújo e Borba (2013) com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio.

Diante desse cenário, o presente estudo tem por objetivo caracterizar e comparar as formas de resolução adotadas por estudantes do Ensino Fundamental ao resolverem problemas de produto cartesiano direto e inverso, investigando: (i) se as estratégias adotadas seriam as mesmas ou se variariam em função do problema ser direto ou inverso; e (ii) se haveria alguma progressão na forma de resolver esses problemas em função dos anos de escolaridade. Esses objetivos estão associados à ideia de que as situações em que os conceitos estão inseridos têm papel importante nas formas de raciocinar adotadas, estando associados, ainda, a uma perspectiva de desenvolvimento do raciocínio combinatório em relação a problemas de produto cartesiano.

Método

Participantes

Participaram 269 estudantes do Ensino Fundamental de escola pública estadual da cidade de São Paulo, com idades entre 8 e 10 anos. Foram divididos em três grupos em função da escolaridade: 86 alunos do 3º ano, 94 alunos do 4º ano e 89 alunos do 5º ano.

Material e Procedimento

Cada participante resolveu individualmente dois problemas de produto cartesiano apresentados por escrito, um em cada página de um pequeno caderno, em uma ordem fixa: primeiro o problema direto cuja resolução requeria a multiplicação e em seguida o problema inverso, cuja resolução requeria a divisão (ver figuras adiante). A aplicação foi conduzida de forma coletiva pela professora em sala de aula, com o auxílio de três pesquisadores. A professora lia em voz alta cada problema.

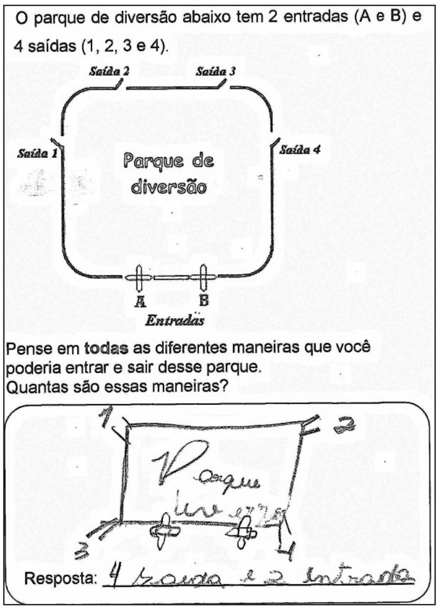
Os problemas apresentavam como medida-produto trajetos derivados de combinações entre entradas e saídas em um parque de diversão. Quanto às características numéricas, em cada problema havia apenas duas medidas elementares (entradas e saídas) e os números eram pequenos (2, 4 e 12). As combinações entradas e saídas poderiam gerar os seguintes valores de medida-produto: 8 no problema direto e 6 no problema inverso. Os mesmos números estavam envolvidos nos dois problemas.

Resultados

Considerando o objetivo do estudo, foram analisadas as estratégias de resolução adotadas, tomando-se por base o sistema de análise proposto por Spinillo e Silva (2010) que se caracteriza por um conjunto de estratégias que expressam diferentes níveis de raciocínio combinatório. Esses níveis, por sua vez, estão associados à maneira como a criança estabelece as relações um-para-muitos que são essenciais ao raciocínio combinatório adotado na resolução de problemas de produto cartesiano, como postulado nas considerações teóricas anteriormente apresentadas (ver Piaget; Szeminska, 1971; Moro; Soares, 2006a; 2006b). A análise das estratégias foi realizada por meio de discussão entre dois juízes com experiência em pesquisa neste campo do conhecimento e em análises desta natureza até chegarem a um consenso quando existiam discordâncias na classificação. As estratégias são descritas e exemplificadas a seguir.

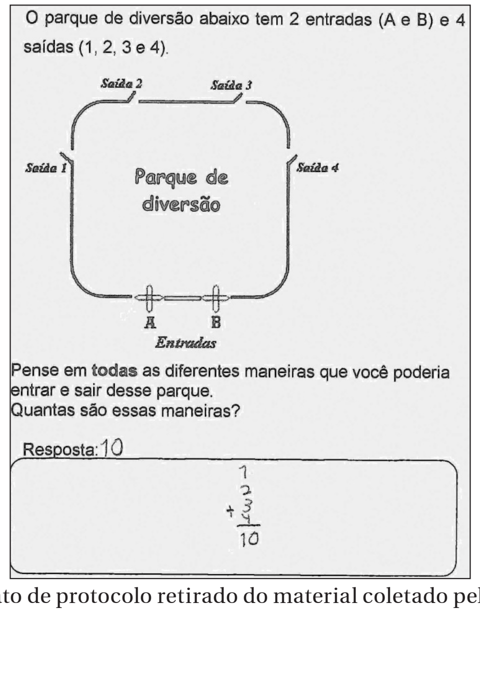
Estratégia Tipo 1: formas de resolução não combinatórias que se caracterizam por ausência de resposta, por respostas em que não é possível identificar a resolução adotada e respostas inadequadas baseadas no uso de operação inapropriada. Abaixo são apresentados exemplos dos métodos adotados pelos participantes para a solução do problema de produto cartesiano direto proposto:

Figura 1 – Procedimento Adotado pelo Participante 1



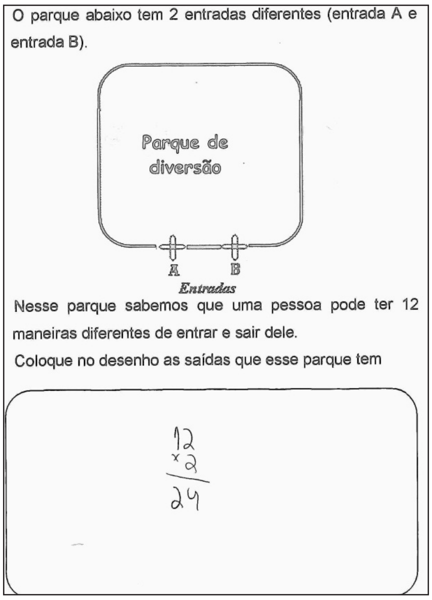
Fonte: Extrato de protocolo retirado do material coletado pela pesquisa.

Figura 2 – Procedimento Adotado pelo Participante 2



Fonte: Extrato de protocolo retirado do material coletado pela pesquisa.

Figura 3 – Procedimento Adotado pelo Participante 3



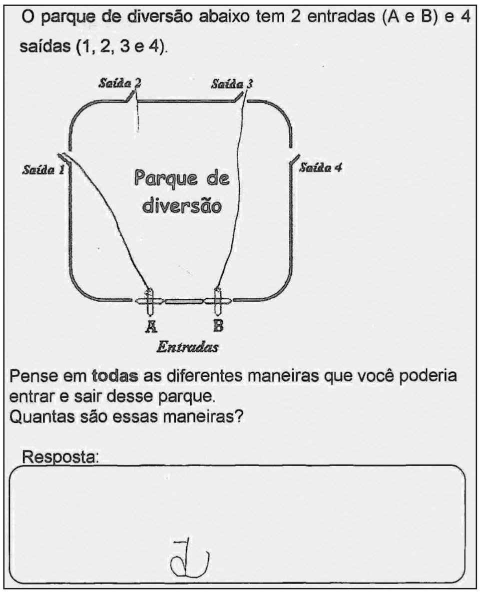
Fonte: Extrato de protocolo retirado do material coletado pela pesquisa.

Na Figura 1, a resolução se limita à repetição de parte do enunciado do problema, sem que qualquer procedimento de resolução seja encaminhado. Na Figura 2, o mesmo problema é resolvido a partir da ideia de que as numerações atribuídas às saídas do parque (saída 1, 2, 3 e 4) eram quantidades de saídas que somadas resultavam em 10 saídas. Nota-se que o estudante interpretou de forma equivocada o sentido dos números no enunciado do problema.

Na Figura 3, a estratégia consistiu em multiplicar o número de trajetórias (maneiras de entra e sair do parque) pelo número de entradas do parque, obtendo-se 24 como resposta. Observa-se que o estudante não foi capaz de compreender que as trajetórias eram constituídas pela combinação das duas entradas com as saídas.

Estratégia Tipo 2: formas de resolução que se baseiam em combinações fixas entre entradas e saídas, que não podem ser desfeitas, obtendo como resposta o menor valor presente no enunciado do problema. Embora esta estratégia já expresse a ideia de combinar elementos (no caso, formando pares entre entradas e saídas), ela ainda é inapropriada, pois se deriva de relações um-para-um que são insuficientes para a resolução de problemas de combinatória, como é o caso de problemas de produto cartesiano que requer o estabelecimento de relações um-para-muitos. O uso desta estratégia decorre no fato de haver elementos de um dado conjunto que não são combinados com elementos do outro conjunto. Segue exemplo abaixo do método adotado por um dos participantes para a solução do problema de produto cartesiano direto proposto:

Figura 4 – Procedimento Adotado pelo Participante 4

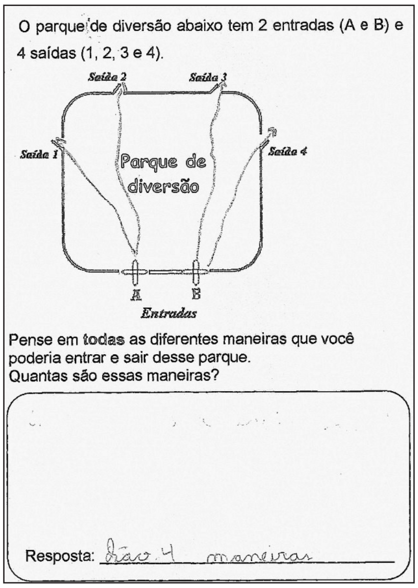


Fonte: Extrato de protocolo retirado do material coletado pela pesquisa.

Pela resposta dada e pelos grafismos produzidos, como mostrado na Figura 4, duas trajetórias foram estabelecidas: combinando-se a Entrada A com a Saída 1 e a Entrada B com a Saída 3. Estas são combinações fixas baseadas na correspondência um-para-um (uma entrada e uma saída) em que todas as entradas são consideradas na resolução, porém algumas saídas não o são, como é o caso da Saída 2 e da Saída 4. De acordo com a forma de raciocinar adotada, não se podem combinar novamente entradas que já estão associadas a outras saídas.

Estratégia Tipo 3: formas de resolução que expressam uma combinação flexível entre os elementos de um conjunto com os do outro, (no caso, formando pares entre entradas e saídas), uma vez que a criança aceita a ideia de que um elemento de um conjunto (Entrada A) pode combinar com mais de um elemento de outro conjunto (Saídas 1, 2 e 3), envolvendo todos os elementos dos dois conjuntos. Verifica-se, diferentemente do observado na estratégia Tipo 2, a emergência da correspondência um-para-muitos, que é essencial à noção de combinatória. No entanto, apesar deste avanço, a criança não esgota todas as combinações possíveis, de modo que um elemento de um dado conjunto se combina com alguns elementos do outro conjunto, porém não com todos. Segue exemplo abaixo do método adotado por um dos participantes para a solução do problema de produto cartesiano direto proposto:

Figura 5 – Procedimento Adotado pelo Participante 5

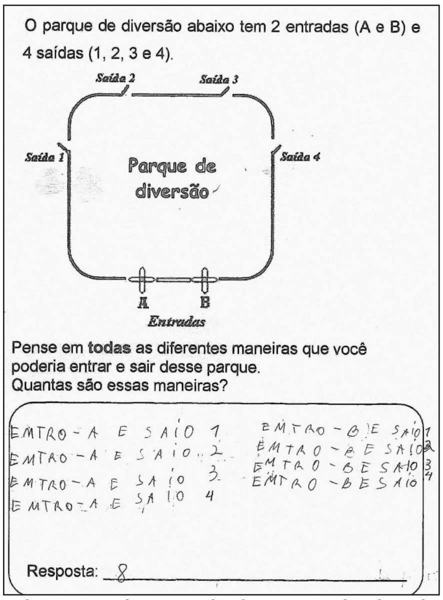


Fonte: Extrato de protocolo retirado do material coletado pela pesquisa.

A Figura 5 mostra claramente a emergência da correspondência um-para-muitos, sendo possível combinar uma entrada com duas saídas e outra entrada com outras duas saídas. Embora o estudante compreenda que uma entrada possa se combinar com mais de uma saída, sua compreensão está presa à ideia de que uma entrada não pode se combinar com a saída que está associada a outra entrada. Importante comentar que, diferentemente da Estratégia Tipo 2, esta forma de resolução permite que todos os elementos dos dois conjuntos (entradas e saídas) sejam combinados, ainda que não sejam estabelecidas todas as combinações possíveis. Desta forma, apesar da flexibilidade na formação das combinações entre os elementos dos dois conjuntos (no caso, formando pares entre entradas e saídas), a estratégia adotada não permite que todas as possibilidades sejam esgotadas na formação das trajetórias.

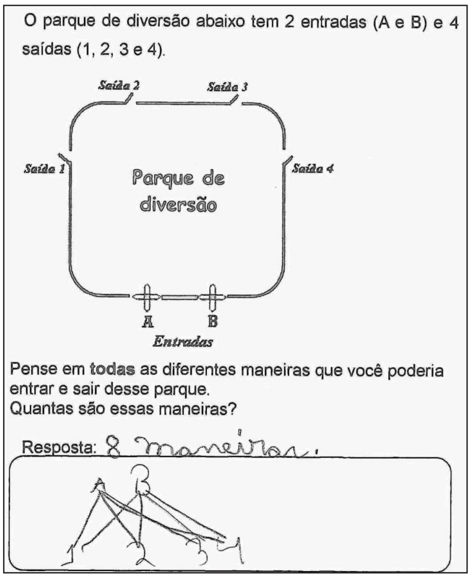
Estratégia Tipo 4: formas de resolução combinatórias que envolvem a correspondência um-para-muitos entre todos os elementos de um conjunto com todos os do outro conjunto de forma exaustiva. Nesse caso, a criança encontra todos os casos possíveis de combinação, aceitando que cada elemento de um conjunto pode ser combinado com todos os elementos do outro conjunto. Abaixo são apresentados exemplos dos métodos adotados pelos participantes para a solução do problema de produto cartesiano direto proposto:

Figura 6 – Procedimento Adotado pelo Participante 6



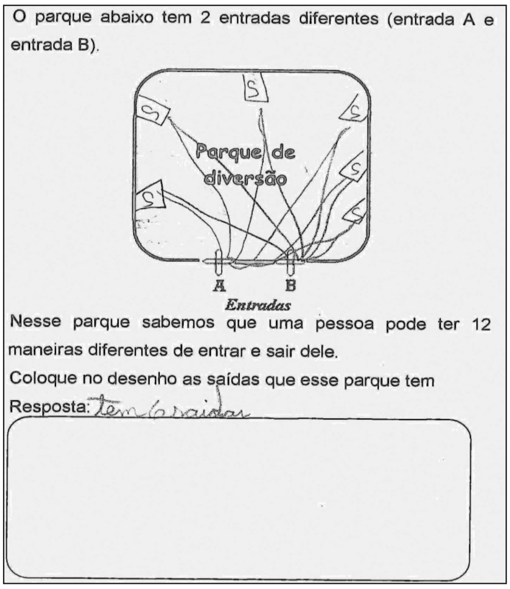
Fonte: Extrato de protocolo retirado do material coletado pela pesquisa.

Figura 7 – Procedimento Adotado pelo Participante 7



Fonte: Extrato de protocolo retirado do material coletado pela pesquisa.

Figura 8 – Procedimento Adotado pelo Participante 8


O parque abaixo tem 2 entradas diferentes (entrada A e entrada B).

Nesse parque sabemos que uma pessoa pode ter 12 maneiras diferentes de entrar e sair dele.

Coloque no desenho as saídas que esse parque tem

Resposta: tem 6 saidas

Fonte: Extrato de protocolo retirado do material coletado pela pesquisa.

A Figura 6 traz uma resolução que é representada através da escrita e na Figura 8 observa-se o uso da árvore de possibilidades. Seja através da representação por meio da linguagem escrita (Figura 6) ou por meio de diagrama (Figura 7) esses exemplos ilustram a preocupação do estudante em exaurir todas as possibilidades de combinação quando toma um dos elementos de um conjunto e o combina de forma sistemática com todos os elementos do outro conjunto. Assim, apesar de se constituírem em representações distintas os dois exemplos consistem em soluções combinatórias.

Na Figura 8 a resolução se assemelha àquela ilustrada na Figura 7. Considerando que o exemplo trata de um problema de produto cartesiano inverso, é possível supor duas formas de resolução: uma em que as combinações foram feitas gradativamente, em que as 12 trajetórias iam sendo distribuídas entre as saídas (indicadas por um S no interior de um quadrado) e outra em que a operação de divisão era aplicada (12 dividido por 2 igual a 6), após o que representava as seis saídas e as trajetórias formadas com as duas entradas já presentes no diagrama do parque. Considerando que o examinador não estava presente no momento em que o estudante resolvia os problemas, não é possível saber ao certo qual o processo de resolução efetivamente empregado. Contudo, seja um procedimento ou outro é certo que a estratégia adotada era combinatória.

De acordo com a Tabela 1, as estratégias variam em função do tipo de problema. Os problemas diretos eram resolvidos por meio dos quatro tipos de estratégias, enquanto que os inversos eram resolvidos apenas por meio das estratégias Tipo 1 (ausência de solução combinatória) e

Tipo 4 (solução combinatória). Uma discussão acerca desse resultado será conduzida adiante.

Tabela 1 – Frequência e Percentual (Entre Parênteses) de Estratégias em Função do Tipo de Problema

Estratégias	Problema Direto (n=269)	Problema Inverso (n= 269)
Tipo 1 (Ausência de solução combinatória)	173 (64,4)	258 (95,9)
Tipo 2 (Combinação fixa)	8 (3)	0
Tipo 3 (Combinação flexível)	33 (12,2)	0
Tipo 4 (Solução combinatória)	55 (20,4)	11 (4,1)

Fonte: Dados quantificados, retirados do material coletado pela pesquisa.

Verifica-se que tanto no problema direto (64,4%) como no inverso (95,9%), a estratégia Tipo 1 foi significativamente mais utilizada em relação às demais, conforme revelado pelo Teste de Wilcoxon (valores de $p <.02$). Sendo isso, particularmente, observado em relação ao problema inverso.

Comparações entre os tipos de problema mostraram que a estratégia Tipo 1 foi mais frequente no problema inverso do que no direto ($Z= -9,113$; $p= .000$). Enquanto o oposto ocorreu em relação à estratégia Tipo 4 que foi mais adotada no problema direto do que no inverso ($Z= -6,223$; $p= .000$).

A Tabela 2 mostra que em cada ano escolar houve uma maior frequência da estratégia do Tipo 1 do que as demais estratégias em relação a ambos os problemas, sendo isso confirmado pelo Teste de Wilcoxon (problema direto: valores de $p < 0.02$. Problema inverso: valores de $p < 0.001$).

Tabela 2 – Frequência e Percentual (Entre Parênteses) de Estratégias em Função do Tipo de Problema e Ano Escolar

Problema Direto			
Estratégias	3º ano n = 86	4º ano n = 94	5º ano n = 89
Tipo 1 (Ausência de solução combinatória)	56 (65,1)	58 (61,7)	59 (66,3)
Tipo 2 (Combinação fixa)	4 (4,7)	3 (3,2)	1 (1,1)
Tipo 3 (Combinação flexível)	14 (16,3)	14 (14,9)	5 (5,6)
Tipo 4 (Solução combinatória)	12 (14)	19 (20,2)	24 (27)
Problema Inverso			
Tipo 1 (Ausência de solução combinatória)	78 (90,7)	91 (96,8)	89 (100)
Tipo 2 (Combinação fixa)	0	0	0
Tipo 3 (Combinação flexível)	0	0	0
Tipo 4 (Solução combinatória)	8 (9,3)	3 (3,2)	0

Fonte: Dados quantificados, retirados do material coletado pela pesquisa.

Analisando os dados da Tabela 2 e iniciando pelo problema inverso, é possível notar que a estratégia Tipo 1 foi adotada na quase totalidade das soluções das crianças do 3º e do 4º ano e na totalidade de soluções das crianças do 5º ano (valores de p= .000). Ao aplicar o Teste U de Mann-Whitney para identificar se houve diferenças entre o 3º e o 5º ano em relação à estratégia Tipo 1, observou-se que sim (U= 3471,0; p= .003). Em relação à estratégia Tipo 4, igualmente foi encontrado diferença significativa entre esses dois anos escolares (U= 3471,0; p= .003). Assim, a estratégia Tipo 1 era mais adotada no 3º ano do que no 5º ano, e a estratégia Tipo 4 era mais empregada pelas crianças do 5º ano do que pelas do 3º ano.

Considerando apenas o problema direto, comparações entre os anos escolares, por meio do Teste U de Mann-Whitney, revelaram diferenças significativas em relação às estratégias do Tipo 3 e Tipo 4. A estratégia Tipo 3 foi menos adotada pelas crianças do 5º ano (5,6%) do que pelas crianças do 3º ano (16,3%) (U= 3419,0; p= .024) e do 4º ano (14,9%) (U= 3795,0; p= .040). Quanto à estratégia Tipo 4, a única diferença identificada foi em relação ao seu uso no 3º ano, que foi menos frequente do que no 5º ano (Z= 3329,0; p= .034).

No problema inverso, o Teste U de Mann-Whitney identificou diferenças entre o 3º e o 5º ano em relação à estratégia Tipo 1 (U= 3471,0; p= .003) e em relação à estratégia Tipo 4 (U= 3471,0; p= .003). A estratégia Tipo 1 era mais adotada no 3º ano do que no 5º ano, e a estratégia Tipo 4 era mais empregada pelas crianças do 5º ano do que pelas do 3º ano.

Conclusões e Discussão

O primeiro resultado a ser comentado é que problemas de combinatória inversos são mais difíceis do que os diretos, como documentado na literatura. O que os dados deste estudo acrescentam à literatura é que isso ocorre porque em tais problemas as relações um-para-muitos são particularmente mais implícitas do que nos problemas diretos, uma vez que a partir do valor do conjunto produto dado no enunciado é necessário determinar um dos conjuntos elementares. Esta relação é bem mais opaca do que aquela que precisa ser estabelecida entre os conjuntos elementares nos problemas diretos. Tal interpretação se apoia na análise das estratégias adotadas na resolução dos dois tipos de problemas de produto cartesiano. Importante enfatizar que a simples análise do desempenho (número de acertos), como usualmente conduzida nas pesquisas na área, não permite gerar essa explicação. Nesse sentido, as estratégias identificadas assumiram papel de destaque, contribuindo para explicar a razão da diferença de desempenho entre problemas diretos e inversos.

Além desse resultado, os dados permitiram responder a seguinte questão: as estratégias de resolução adotadas seriam as mesmas ou variariam em função do problema ser direto ou inverso? Por um lado, a resposta a essa questão é afirmativa, pois havia estratégias comuns aos dois tipos de problema. Contudo, por outro lado, variações foram identificadas, pois havia estratégias que foram adotadas apenas nos problemas diretos. Importante ressaltar que as estratégias identificadas são de natureza hierárquica, no sentido de expressarem diferentes níveis de compreensão: as estratégias Tipo 2 e Tipo 3 revelam a emergência de raciocínio combinatório, aspecto este ausente na estratégia Tipo 1 e consolidado na estratégia Tipo 4, que revela o uso de solução combinatória. Portanto, em uma perspectiva de desenvolvimento, identifica-se uma progressão no raciocínio combinatório que se manifesta na resolução de problemas de produto cartesiano diretos, mas não em relação aos inversos. Nos inversos, parece haver uma ruptura nessa progressão, indicando um comportamento do tipo tudo-ou-nada: as crianças passam da ausência de solução combinatória para o uso de soluções combinatórias apropriadas. Esse é, sem dúvida, um aspecto interessante acerca do raciocínio matemático no âmbito da Combinatória. Talvez isso ocorra porque uma vez compreendidas, de forma gradual, as relações um-para-muitos nos problemas diretos, elas passam a ser aplicadas, de forma imediata, na resolução dos problemas inversos. Em outras palavras, a compreensão das relações um-para-muitos parece se iniciar no âmbito dos problemas diretos. Esse dado tem repercussões didáticas, sugerindo que o ensino introdutório da Combinatória possa se iniciar pelos problemas de produto cartesiano direto avançar na direção dos problemas inversos, colocando-os em perspectiva. Na realidade, a introdução da Combinatória no Ensino Fundamental por meio de problemas diretos já vem sendo feita, ainda que de maneira tímida, sendo importante pensar-se em propostas que gradativamente abordem os problemas inversos, deixando explícitas as relações um-para-muitos.

O que se nota é que, embora o padrão da progressão identificada seja diferente em ambos os tipos de problema, a natureza da dificuldade é a mesma: o estudante tem que lidar com as relações um-para-muitos que estão implícitas tanto nos problemas diretos como nos inversos. Esta natureza implícita das relações é mais acentuada nos problemas inversos pelas razões discutidas anteriormente. Esse resultado se torna mais robusto devido ao fato de que nessa investigação os participantes que resolviam os problemas diretos eram os mesmos que resolviam os problemas inversos. Pelo que se conhece, tal controle metodológico estava ausente em pesquisas anteriores, que investigavam problemas diretos ou problemas inversos, sem articulá-los em uma mesma população.

O desenvolvimento do raciocínio combinatório observado neste estudo também se assemelha à progressão mencionada por Moro e Soares (2006a; 2006b) e por English (1991; 1992). Entretanto nesses estudos não foram exploradas comparações entre estratégias adotadas em problemas cartesianos de diferentes tipos, examinando-se apenas a resolução de problemas diretos. Assim, os resultados desta pesquisa tanto corroboram dados anteriormente documentados na literatura como também contribuem com novas informações acerca do desenvolvimento desse raciocínio.

Para finalizar, de modo geral o estudo revela a grande dificuldade que os estudantes encontram frente a problemas que requerem raciocinar de forma combinatória. É preocupante verificar que essa dificuldade persiste mesmo entre aqueles que estão no 5º ano do Ensino Fundamental que já dominam as operações de multiplicação e de divisão, e que já foram formalmente instruídos a outros conceitos próprios do campo das estruturas multiplicativas. Seria importante saber quando, com que frequência, e como os livros didáticos abordam problemas que envolvem o raciocínio combinatório. O que se deseja comentar é que além da complexidade inerente ao raciocínio combinatório, a pouca familiaridade com problemas desse tipo é um fator adicional de dificuldade para o estudante. Dois aspectos poderiam ser considerados no ensino de Matemática a esse respeito: expor os alunos a problemas de produto cartesiano e tornar explícitas as relações um-para-muitos (primeiro em problemas diretos e posteriormente em problemas inversos). Spinillo e Silva (2010), por exemplo, obtiveram um índice de sucesso expressivo na resolução de problemas diretos por crianças quando lhes eram explicitadas as relações um-para-muitos. Segundo nossa análise, Azevedo e Borba (2013a; 2013b) também explicitaram essas relações ao explorarem a árvore de possibilidades na resolução de problemas de produto cartesiano. Portanto, além dos limites, há as possibilidades que viabilizam o ensino da Combinatória nos anos iniciais da escolarização básica.

Como comentário final, os problemas de produto cartesiano, devido a sua natureza, são um caso à parte e não podem ser tratados como mais um problema de multiplicação ou de divisão, pois demandam formas de raciocinar mais complexas que precisam ser consideradas nas situações de ensino.

Recebido em 15 de maio de 2016
Aprovado em 27 de agosto de 2016

Referências

AZEVEDO, Juliana; ARAÚJO, Julia; BORBA, Rute. Problemas Combinatórios Inversos Resolvidos por Alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental e do 3º Ano do Ensino Médio. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 2, p. 41-62, 2013.

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute. Construindo Árvores de Possibilidades Virtuais: o que os alunos podem aprender discutindo relações combinatórias? **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v. 7, n. 2, p. 39-62, 2013a.

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute. Combinatória: a construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de softwares. **Alexandria**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 113-140, 2013b.

BATANERO, Carmem; GODINO, Juan; NAVARRO-PELAYO, Virginia. Combinatorial Reasoning and its Assessment. In: GAL, Iddo; GARFIELD, Joan (Ed.). **The Assessment Challenge in Statistics Education**. Amsterdam: ISSO Press, 1997. P. 239-252.

BRYANT, Peter; MORGADO, Luiza; NUNES, Terezinha. Children's Understanding of Multiplication. In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL CONFERENCE OF THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 21., 1992, Tokyo. **Anais...** Tokyo: PME, 1992. P. 367-385.

EIZENBERG, Michal; ZASLAVSKY, Orit. Undergraduate Student's Verification Strategies of Solutions to Combinatorial Problems. In: PROCEEDINGS OF THE

ANNUAL CONFERENCE OF THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 26., 2002, Norwich. **Anais...** Norwich: UEA/PME, 2002. P. 321-328.

EIZENBERG, Michal; ZASLAVSKY, Orit. Cooperative Problem Solving in Combinatorics: the inter-relations between control processes and successful solutions. **Journal of Mathematical Behavior**, New York, v. 22, n. 4, p. 389-403, 2003.

ENGLISH, Lyn. Young Children's Combinatoric Strategies. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 22, p. 451-474, 1991.

ENGLISH, Lyn. Children's Use of Domain-Specific Knowledge and Domain--General Strategies in Novel Problem Solving. **British Journal of Educational Psychology**, Edinburgh, v. 62, n. 2, p. 203-216, 1992.

ENGLISH, Lyn. Children's Strategies for Solving Two-and-Three-Dimensional Combinatorial Problems. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 24, n.3, p. 255-273, 1993.

FISCHBEIN, Efraim; GAZIT, Avikan. The Combinatorial Solving Capacity in Children and Adolescents. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, Karlsruhe, v. 5, p. 193-198, 1988.

FISCHBEIN, Efraim; GROSSMAN, Catherine. Schemata and Intuitions in Combinatorial Reasoning. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 34, p. 27-47, 1997.

FISCHBEIN, Efraim; PAMPU, Ileana; MÎNZAT, Ion. Effects of Age and Instruction on Combinatory Ability in Children. In: FISCHEIN, Efraim (Ed.). **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children**. Dordrecht: D. Reidel, 1970. P. 189-201.

HADAR, Nitza; HADASS, Rina. The Road to Solving a Combinatorial Problem is Strewn With Pitfalls. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 12, p. 435-443, 1981.

INHELDER, Barbara; PIAGET, Jean. **Da Lógica da Criança à Lógica do Adolescente**. São Paulo: Pioneira, 1976.

MAHER, Carolyn; MARTINO, Amy. The Development of the Idea of Mathematical Proof: a five-year case study. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 27, n. 2, p. 194-214, 1996.

MARTINO, Amy; MAHER, Carolyn. Teacher Questioning to Promote Justification and Generalization in Mathematics: what research practice has taught us. **Journal of Mathematical Behavior**, Reston, v. 18, p. 53-78, 1999.

MEKHMANDAROV, Ibby. Analysis and Synthesis of the Cartesian Product by Kindergarten Children. In: INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 24., 2000, Hiroshima. **Anais...** Hiroshima: Hiroshima University, 2000. P. 295-301.

MERAYO, Garcia. **Matemática Discreta**. Madri: Editora Thomson Paraninfo S.A., 2001.

MORO, Maria Lúcia; SOARES, Maria Tereza. Níveis de Raciocínio Combinatório e Produto Cartesiano na Escola Fundamental. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 99-124, 2006a.

MORO, Maria Lúcia; SOARES, Maria Tereza. Psicogênese do Raciocínio Combinatório e Problemas de Produto Cartesiano na Escola Fundamental. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2006, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Águas de Lindóia, 2006b. P. 1-18.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 2000.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Crianças Fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Como Crianças de 1ª a 4ª Série Resolvem Problemas de Raciocínio Combinatório? In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2008, Recife. **Anais...** Recife: Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2008. P. 1-12.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem Dança com Quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **Zetetike**, Campinas, v. l, n. 17, p. 105-150, 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. **Em Teia**, Recife, v. 1, n. 1, p. 1-22, jun. 2010.

PIAGET, Jean; INHELDER, Barbara. **A Origem da Ideia do Acaso na Criança**. Tradução: Ana Maria Coelho. Rio de Janeiro: Record, 1951.

PIAGET, Jean; SZEMINSKA, Alina. **A Gênese do Número na Criança**. Rio de Janeiro: Zahar, 1971.

ROA, Rafael; BATANERO, Carmem; GODINO, Juan; CAÑIZARES, Maria Jesus. Estrategias en la Resolución de Problemas Combinatorios por Estudiantes con Preparación Matemática Avanzada. **Epsilon**, Granada, v. 36, p. 433-446, 1997.

SPINILLO, Alina Galvão; SILVA, Juliana Ferreira Gomes da. Making Explicit the Principles Governing Combinatorial Reasoning: does it help children to solve cartesian product problems? In: PROCEEDINGS OF THE CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 34., 2010, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: PME, 2010. P. 26-224.

TEIXEIRA, Leny; CAMPOS, Edileni de; VASCONCELLOS, Monica; GUIMARÃES, Sheila. Problemas Multiplicativos Envolvendo Combinatória: estratégias de resolução empregadas por alunos do ensino fundamental público. **Educar em Revista**, Curitiba, n. 1, p. 245-270, 2011.

TEIXEIRA, Leny; VASCONCELLOS, Monica; GUIMARÃES, Sheila. A Resolução de Problemas Multiplicativos de Produto de Medidas: um caso exemplar. In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto (Org.). **A Aprendizagem Matemática na Perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV, 2009. P. 77-88.

VERGNAUD, Gerard. La Théorie des Champs Conceptuels. **Récherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, Gerard. **El Niño, las Matemáticas y la Realidad**: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México: Trillas, 1991.

VERGNAUD, Gerard. Multiplicative Structures. In: HIEBERT, James; BEHR, Merlyn (Org.). **Numbers Concepts and Operations in the Middle Grades**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1998. P. 141-161.

VERGNAUD, Gerard. **A Criança, a Matemática e a Realidade**: problemas do ensino da matemática na escolar elementar. Tradução: Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.

Sandra Maria Pinto Magina é bacharel em Psicologia, Doutora em Educação Matemática pela Universidade de Londres, Pós-Doutora pela universidade de Lisboa. Professora do Departamento de Ciências Exatas e Tecnologia, e membro dos colegiados dos Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática e em Educação da UESC/BA.
E-mail: sandramagina@gmail.com

Alina Galvão Spinillo é bacharel em Psicologia pela UFPE, Mestre em Psicologia Cognitiva, Doutora em Psicologia do Desenvolvimento pela Universidade de Oxford. Professora titular da Universidade Federal de Pernambuco, UFPE.
E-mail: alinaspinillo@hotmail.com

Lianny Milenna de Sá Melo é bacharel em Psicologia e Mestre em Psicologia Cognitiva; psicóloga do Centro de Referência de Assistência Social de Ipojuca, PE.
E-mail: lianny_melo@hotmail.com