

O Desenvolvimento da Argumentação Matemática por Estudantes de uma Turma do Ensino Fundamental

Pi-Jen Lin¹

¹National Tsing Hua University (NTHU), Hsinchu – Taiwan

RESUMO – O Desenvolvimento da Argumentação Matemática por Estudantes de uma Turma do Ensino Fundamental¹. O uso de argumentos válidos não surge de maneira espontânea, sendo adquirido apenas com a prática. Este estudo foi desenvolvido para proporcionar, aos estudantes, oportunidades planejadas de atividades motivadoras para desencadear a argumentação em turmas do Ensino Fundamental. O foco do artigo é compreender como a argumentação evoluiu quando os estudantes envolvidos na conjectura a incorporaram ao ensino regular de matemática durante dois anos consecutivos. Trabalhou-se com um grupo de 6 professores para desenvolver tarefas de conjectura e estratégias pedagógicas para apoiá-los no ensino e, com isso, melhorar a qualidade da argumentação de 24 estudantes do 3º e do 4º ano. Os dados coletados consistiram principalmente de tarefas de conjectura, gravações em áudio e vídeo de observações em sala de aula e das folhas de trabalho dos estudantes. Os resultados indicam que a evolução da argumentação foi identificada por dois aspectos: as características e a qualidade da argumentação.

Palavras-chave: Argumentação. Conjectura. Planejamento de Tarefa. Ensino Fundamental.

ABSTRACT – The Development of Students’ Mathematical Argumentation in a Primary Classroom. The use of valid argument does not come naturally. It is acquired only through practice. This study was accomplished to provide students intended opportunities of engaging activities for launching argumentation in primary classrooms. The focus of the paper is how argumentation was evolved when students engaged in the conjecturing incorporated into regular mathematics instruction over two consecutive years. Working with a group of 6 teachers was to develop conjecturing tasks and pedagogical strategies to support them in teaching, and then to enhance the quality of students’ argumentation when 24 students were in grades 3 and 4. The collected data mainly consisted of conjecturing tasks, audio – and video –taped recordings of classroom observations, and students’ worksheets. Results indicate that the evolution of argumentation was identified in two aspects: the characteristics and the quality of the argumentation.

Keywords: Argumentation. Conjecturing. Task Design. Primary Classroom.

Introdução

Muitos estudos enfatizaram a importância da argumentação (Stylianides; Bieda; Morselli, 2016; Kim; Hand, 2015), pois as habilidades de argumentação efetiva são essenciais para a compreensão conceitual e a boa comunicação. Diversos estudos e documentos referentes a reformas recomendaram que os estudantes devem ter oportunidades precoces de fazer conjecturas, explorar sua fidedignidade, usar contraexemplos, justificar suas conclusões, comunicá-las aos outros e responder aos seus argumentos (Common Core State Standards Initiative, 2010; Hanna; Villiers 2012; National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Entretanto, o ensino da argumentação em sala de aula tem sido lento, pois existem vários desafios tanto para professores como para estudantes. Os estudantes de diferentes níveis educacionais tendem a enfrentar sérias dificuldades em argumentação, como aquelas enfrentadas por estudantes do Ensino Médio ao justificarem suas soluções (Ko, 2010; Stylianides; Stylianides; Philippou, 2007). Os professores em atuação não acreditam que um único contraexemplo seja suficiente para refutar uma tese universal (Barkai; Tsamir; Tirosh; Dreyfus, 2002).

Os professores que nunca estudaram argumentação quando eram crianças podem se sentir despreparados para ensiná-la (Gabel; Dreyfus, 2013; Reid; Zack, 2011). Muitos professores de Ensino Fundamental não acham que possuem formação suficiente em matemática para ensinar argumentação ou nem mesmo uma ideia clara de como a argumentação seria. Muitas vezes, os próprios professores enfrentam dificuldades similares àquelas de seus estudantes em termos de argumentação. Conforme foi enfatizado por Yackel e Hanna (2003), o objetivo mais desafiador para os educadores de matemática ao ajudarem os estudantes a desenvolverem a argumentação é “[...] delinear meios para apoiar os professores no desenvolvimento de formas de prática de matemática em sala de aula que a promovam como raciocínio e que possam ser realizadas em larga escala com sucesso” (Yackel; Hanna, 2003, p. 234). Isto indica que os professores precisam de apoio para adquirirem novas experiências ou novos conhecimentos acerca do ensino da argumentação. Os dados apresentados no estudo faziam parte de um projeto sobre argumentação matemática envolvendo seis professores de Ensino Fundamental ao longo de três anos. O projeto objetivava oferecer apoio aos professores no planejamento de tarefas e na sua execução em turmas de níveis iniciais nas quais ocorre a argumentação em matemática. Ao planejar tarefas para elaboração de conjecturas, os professores tinham que seguir os objetivos educacionais e planejar cuidadosamente como incluir atividades de elaboração de conjecturas em atividades rotineiras de matemática. Este artigo está baseado nos dados de uma turma nos dois primeiros anos do projeto.

Este estudo considera a conjectura como uma abordagem educacional para despertar o interesse pela argumentação (Lin; Tsai, 2016; Stylianides, 2009). Elaborar conjecturas é um processo composto por observar um número finito de casos, identificar padrões, formular teses/conjecturas, validá-las, generalizá-las, e justificar a generalização

(Cañadas et al., 2007). De acordo com Stylianides (2009), uma conjectura é definida como uma hipótese fundamentada a respeito de uma relação matemática geral baseada em evidências incompletas. O termo de hipótese indica um nível de incerteza acerca da fidedignidade de uma conjectura. A incerteza que leva a uma ação adicional é necessária para sua aceitação ou rejeição. Assim, é mais provável que a conjectura inaugure discursos em sala de aula onde a argumentação ocorra. Neste estudo, diferenciamos argumentação de argumentos. Os argumentos são dados de componentes, teses, garantias, reforços, qualificadores e refutação que contribuem para o conteúdo de um argumento (Toulmin, 1958), enquanto a argumentação se refere ao processo de reunir estes componentes (Knipping, 2008).

Este estudo buscou explorar como a argumentação dos estudantes se desenvolveu entre diferentes domínios da matemática (aritmética, medidas e geometria). A pergunta de pesquisa a ser respondida foi: Como as crianças pequenas desenvolvem a argumentação quando estão envolvidas em tarefas de conjectura incorporadas aos conteúdos matemáticos por intermédio do ensino regular em uma turma do Ensino Fundamental durante dois anos consecutivos?

Marco Teórico

Argumentação

As reformas curriculares no ensino de matemática fizeram surgir um corpo de pesquisa sobre ensino e aprendizagem de argumentação em diferentes níveis de escolaridade, especialmente a pesquisa em sala de aula (Stylianides; Bieda; Morselli, 2016; Stylianou; Blanton; Knuth, 2011). Mesmo os estudantes de Ensino Fundamental conseguem compartilhar suas ideias matemáticas, explorar e discutir os padrões que observam e articular suas generalizações (Keith, 2006; Maher, 2011; Schifter, 2011). Quando as crianças são colocadas em ambientes de aprendizagem apoiada, a ideia da justificativa pode surgir espontaneamente (Maher; Martino, 1996). O apoio poderia ser em forma de questionamento, tipos de problemas ou de tarefas, e normas sociais de argumentação. Entretanto, estudos anteriores não mencionaram quais tarefas tinham probabilidade de apoiar os professores para melhorar a argumentação dos estudantes. Stylianides, Bieda e Morselli (2016) indicaram a necessidade de mais estudos referentes à compreensão dos estudantes sobre argumentação no Ensino Fundamental e em outros domínios além da geometria.

A argumentação envolve comprovação e persuasão. A comprovação é o processo que um indivíduo utiliza para resolver as dúvidas individuais, já a persuasão é o processo de resolver as dúvidas dos outros (Harel; Sowder, 2007). Em aprendizagem argumentativa, é mais provável que a compreensão ocorra quando alguém for solicitado a explicar, elaborar ou defender seu posicionamento aos outros (Makar; Bakker; Ben-Zvi, 2015). A argumentação é considerada um processo social no qual dois ou mais indivíduos se engajam em um discurso matemático.

O pensamento dos estudantes de Ensino Fundamental expresso em sala de aula não segue os padrões da matemática formal, mas estes padrões são importantes para o futuro desenvolvimento de seu pensamento (Hanna; Villiers 2012). Assim, facilitar o uso do argumento exigiria uma mudança na natureza do discurso em aulas de matemática. Espera-se que uma turma de crianças pequenas desenvolva habilidades para argumentos persuasivos, em vez de formarem um público para assistirem o raciocínio dos professores, mas é necessário oferecer aos estudantes as oportunidades de aprender esta argumentação.

Embora os professores estejam cientes da importância da argumentação em aulas de matemática, ainda têm dificuldades para implementá-la. O uso de argumentos válidos não surge espontaneamente e é adquirido apenas com a prática (Kuhn, 1991). Nem todos os problemas levam a conjecturas e problemas diferentes levam a diferentes tipos de conjectura (Cañadas et al., 2007). Isto significa que os professores desempenham um papel fundamental no planejamento de tarefas que estimulem a argumentação dos estudantes em aula de matemática.

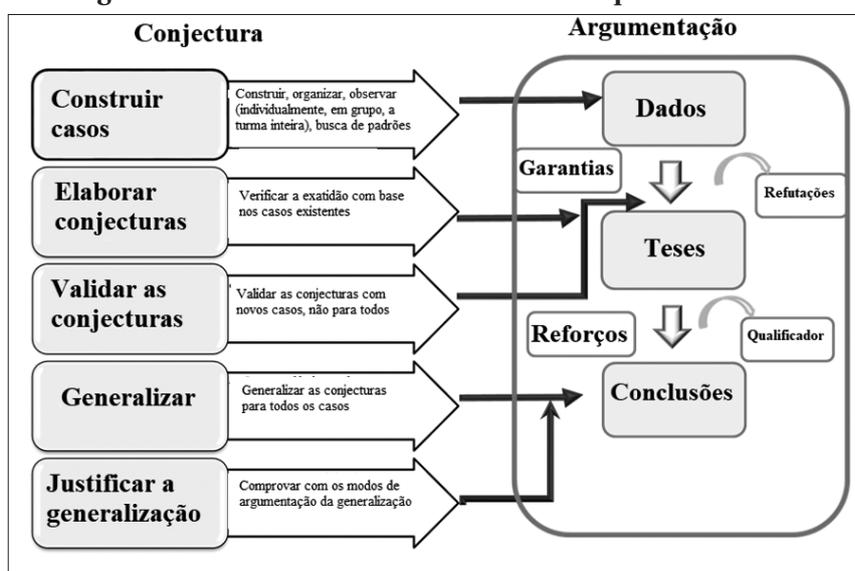
Relação entre Argumentação e Conjectura

A argumentação está fortemente relacionada com a conjectura. A conjectura desencadeia a generalização, ao passo que a justificativa envolvida na argumentação testa a fidedignidade da conjectura. O conhecimento matemático resulta de um processo iterativo de conjectura, testagem, refutação, revisão, retestagem e justificativa. A conjectura está envolvida no fazer matemático (Mason; Burton; Stacey, 1987; Pólya, 1968). Stylianides (2009) aborda a relação entre conjectura e argumentação. Define uma conjectura como “[...] uma hipótese fundamentada sobre uma relação matemática geral baseada em evidências incompletas. O termo ‘fundamentada’ destaca o caráter não-arbitrário da hipótese. O termo ‘hipótese’ indica um nível de incerteza sobre a fidedignidade de uma conjectura e denota que é necessário haver uma ação adicional para sua aceitação ou rejeição” (Stylianides, 2009, p. 264). Conforme Stylianides, fazer conjecturas é uma formulação que soluciona problemas das teses ou de suas hipóteses além de um domínio de casos. Fazer conjecturas também precede a identificação de padrões; generalizar conjecturas e padrões pode gerar conjecturas, que, por sua vez, podem originar o desenvolvimento da justificativa.

A relação entre conjectura e argumentação descrita na Figura 1 é o modelo deste estudo para planejar tarefas e desencadear a conjectura em turmas do Ensino Fundamental. Este modelo faz a conexão entre a conjectura sugerida por Cañadas e Castro (2005) e os componentes da argumentação sugeridos por Toulmin (1958). Os sete passos de Cañadas e Castro (2005) foram adaptados em cinco passos para este estudo, consistindo em elaboração de casos, formulação de conjecturas, validação das conjecturas, generalização, e justificativa da generalização. Os principais componentes da argumentação de Toulmin (1958) consistem em dados, teses, garantias, reforços, qualificadores e refutações. Os dados são a base sobre a qual o argumento está fundado, bem como

as evidências relevantes à tese. As teses são as asserções sobre que alternativas ou valores as pessoas possuem, levando a conclusões que o debatedor deseja alcançar. As garantias se referem a teses que explicam a relação dos dados com a tese. Por exemplo, recorrer a uma regra, definir ou fazer uma analogia. Os qualificadores são condições especiais sob as quais a tese é verdadeira. As garantias são os pressupostos subjacentes que muitas vezes não são explicitados. As refutações são as teses que contradizem os dados, a garantia, o reforço ou o qualificador de um argumento.

Figura 1 – Modelo do Delineamento de Pesquisa do Estudo



Fonte: Elaborado pela autora (2017).

Os componentes da argumentação a serem iniciados em cada passo de conjectura estão descritos na Figura 1. Os sete passos de Cañadas e Castro (2005) não incluem a elaboração de casos, mas os casos criados pelos próprios estudantes têm maior probabilidade de motivá-los para observar e buscar padrões. Harel (2008) sugere que a necessidade intelectual – casos autogerados em vez de casos fornecidos pelo professor – despertam mais curiosidade e interesse por observar e buscar padrões. Assim, a elaboração de casos é acrescentada ao primeiro passo da conjectura, incluindo os passos de Cañadas e Castro de observar casos e organizá-los. Elaborar casos, o primeiro passo da conjectura, corresponde aos dados de argumentação. Formular conjecturas é o segundo passo, incluindo os passos de buscar padrões e gerar conjecturas de Cañadas e Castro. Estas conjecturas tinham probabilidade de desenvolver propriedades matemáticas como conclusões-alvo. As garantias ocorrem em discussões em grupo para compartilhar e verificar as conjecturas que os estudantes propuseram no segundo passo da conjectura. Os casos elaborados no primeiro passo contribuíam para os dados

como um argumento a favor ou contra as teses; as conjecturas a serem formadas no segundo passo correspondiam às teses.

Os três últimos passos da conjectura no modelo – incluindo validar as conjecturas, generalizar e justificar a generalização – correspondia aos três últimos passos de Cañadas e Castro, respectivamente. Validar conjecturas com casos novos ou outros adicionais, o terceiro passo, é um processo de elaborar teses e levar a conclusões-alvo. Refutação, garantias, reforços e qualificadores estão envolvidos no passo da validação. O quarto passo é generalizar as conjecturas para todos os casos. O qualificador, como elemento da argumentação, ocorre no terceiro e no quarto passo da conjectura. A premissa de uma tese é proposta no terceiro e no quarto passo. Justificar a generalização, o passo final da conjectura, corresponde às conclusões-alvo. O raciocínio dedutivo e os reforços estão envolvidos no passo de justificativa da conjectura.

Marco Analítico da Argumentação

O modelo de argumentos de Toulmin (1958) tem sido cada vez mais utilizado por estudos em educação para propor um modelo para argumentos informais em aula e para processos de comprovação de estudantes individuais (Pedemonte, 2007; Osborne; Erduran; Simon, 2004). A análise de argumentos de estudantes tem se concentrado no conteúdo e na estrutura do argumento (Inglis; Mejia-Ramos; Simpson, 2007; Knipping, 2008). O modelo de Toulmin (1958) pode ser usado para avaliar a estrutura de argumentos, mas não leva a julgamentos sobre sua correção, além de apresentar a argumentação de uma maneira descontextualizada, sem nenhum reconhecimento aos aspectos interacionais de um argumento como um evento de discurso. Com isto, a argumentação que ocorre em sala de aula não pode ser analisada usando a lógica formal (Knipping, 2008). Para capturar a natureza coletiva dos argumentos em aula e observar o progresso da argumentação dos estudantes ao longo do tempo, precisamos encontrar um modelo analítico para identificar a argumentação.

Adaptamos o processo analítico de Knipping (2008) como uma ferramenta para analisar a estrutura da argumentação em grupo e no discurso da turma inteira. É proposto um processo de análise de argumentação em três passos: (1) reelaborar a sequência e o significado da conversa em sala de aula; (2) analisar argumentos e estruturas de argumentação; a sequência dos argumentos com elementos diferentes formavam *linhas* de argumentação: as diferentes funções incluem dados, garantias, reforços, refutação e conclusões, sendo representadas por símbolos diferentes (círculo, losango ou retângulo). As crianças pequenas têm pouco conhecimento em matemática e pouca experiência em discussão em grupo, de modo que acrescentamos orientação aos professores na estrutura para observar quando e em que os professores apoiam os estudantes; e (3) comparar estruturas de argumentação local e geral.

O modelo analítico de Knipping (2008), com três passos de análise da argumentação coletiva dos estudantes em sala de aula, não julga quais estruturas de argumentação são melhores do que as outras. Após analisar as estruturas de argumentação, com a finalidade de examinar seu desenvolvimento pelos estudantes, precisamos desenvolver um critério para avaliar a qualidade de uma argumentação. Os critérios para avaliação da qualidade da argumentação para o estudo são adaptados do modelo de Osborne, Erduran e Simon (2004). São propostos dois critérios: um é se o argumento contém dados (inclusive razões e fundamentação), garantias ou reforços, e desenvolve o pensamento racional com base na habilidade para justificar e defender a própria crença. Os argumentos são classificados como de nível inferior quando contêm apenas uma tese. O outro critério é se um argumento envolve refutação ou não. Neste modelo, os argumentos com refutação são classificados como de melhor qualidade do que aqueles sem ela, pois a habilidade de usar a refutação é a mais complexa (Kuhn, 1991). A refutação envolve não apenas compreender o pensamento dos outros, mas também levantar opiniões diferentes para refutar o pensamento dos outros. Osborne, Erduran e Simon (2004) classificam a qualidade da argumentação em cinco níveis. Os níveis 1 e 2 não envolvem refutação, à medida que os níveis 3, 4, e 5 o fazem. Os três níveis mais altos são, portanto, determinados pelos argumentos com refutação. Os níveis 3, 4, e 5 são distintos pela frequência de uso da refutação.

Método de Pesquisa

Participantes e Contexto

Os dados se originaram de uma grande base de dados de um projeto de desenvolvimento profissional de professores com três anos de duração. O objetivo do projeto é desenvolver habilidades docentes para o planejamento de tarefas de conjectura para desencadear a argumentação e observar como a argumentação dos estudantes se desenvolvia quando os professores iniciavam as tarefas em uma turma do Ensino Fundamental. Seis professores entre cinco e vinte anos de experiência estavam dispostos a adotar uma educação inovadora para melhorar a aprendizagem dos estudantes em matemática. O tamanho de cada uma das seis turmas entre o 3º e o 5º ano variava entre 18 e 25 estudantes. Os 24 estudantes na turma da professora Jing, sem nenhuma experiência prévia no envolvimento em conjectura, foram os participantes deste estudo durante dois anos consecutivos, do 3º até o 4º ano. Devido aos limites de extensão do texto, relatamos neste artigo apenas uma das seis turmas selecionadas por dois motivos: (1) para explorar como a argumentação pode se desenvolver por meio de conjectura e, assim, examinar qual tipo de ensino pode ser considerado bem sucedido ao invés da prática docente típica; (2) apenas Jing estava lecionando para estudantes que fizeram parte da mesma turma entre o 3º e o 4º ano, em contrapartida os demais professores estavam lecionando para estudantes que não ficaram na mesma turma entre os dois anos consecutivos.

Planejamento de Tarefas para Conjectura

Durante o andamento das duas turmas de 3º e 4º ano, não fornecemos a Jing um plano detalhado para poder realizar as tarefas; ao invés disso, fornecemos a ela ideias para facilitar seu desenvolvimento por meio do incentivo para que se apropriasse do planejamento de suas tarefas individuais e pedagogia. As reuniões semanais serviram para apresentar a Jing perspectivas teóricas, um possível formato para a tarefa de conjectura, e como deve ser uma aula de argumentação. O formato de uma tarefa de conjectura incluía os cinco passos de conjectura e a orientação de realizar as tarefas de acordo com eles. Jing foi incentivada a incorporar o máximo possível de conjectura aos conteúdos de matemática programados nos livros didáticos, sem ocupar horas a mais.

Entre as dezesseis tarefas que foram realizadas na turma de Jing durante os dois anos, foram selecionadas seis tarefas para serem relatadas neste artigo por três motivos. Primeiramente, as seis tarefas realizadas nas aulas foram observadas. Em segundo lugar, a coleta de dados deveria ser o mais completa possível. Em terceiro lugar, a seleção foi feita entre diversos tópicos e distribuição em períodos diferentes no ano letivo. Três das oito tarefas realizadas no terceiro ano incluíam tópicos de área, perímetro e divisão numérica, e as outras três tarefas selecionadas entre as oito realizadas no quarto ano se referiam a volume, triângulos e quadriláteros. O tópico do perímetro de um retângulo é apresentado como um exemplo (ver Quadro 1).

Quadro 1 – Tarefa de Conjectura do Perímetro de um Retângulo

Tarefa: Reconhecer que o perímetro continua igual se um quadrado pequeno for recortado do canto de um retângulo.	Cinco passos da conjectura
(A). Recortar um quadrado pequeno de uma folha de papel tamanho A4 e colori-lo.	Elaborar casos individuais, organizar e observar os casos
(B). Colocar o pedaço de papel que você coloriu junto com os do grupo. De quantas maneiras diferentes o papel foi recortado no seu grupo?	
(C). O que você descobriu depois de recortar um quadrado da folha de papel tamanho A4? Responda por escrito.	Buscar padrões Formular as conjecturas
(D). Existem outras maneiras de o perímetro continuar igual ou ser maior ou menor?	
(E). De que maneira você recortou para que esta nova forma continue sempre com o perímetro igual ou seja menor ou maior em comparação com o original?	
(F). Como você valida suas conjecturas?	Validar as conjecturas
(G). Cada uma de suas conjecturas funciona para todos os casos?	Generalizar as conjecturas
(H). Como você convence os outros de que suas conjecturas são verdadeiras?	Justificar a generalização

Fonte: Elaborado pela autora (2017).

Desencadeamento da Conjectura para Início da Argumentação

Por meio de reuniões semanais, também oferecemos orientação a respeito de como desencadear tarefas de conjectura em aula para enfatizar a argumentação matemática pelo uso de garantias a favor ou contra uma conjectura. As reuniões semanais também proporcionaram a Jing uma reflexão sobre como as tarefas funcionaram e a ajudaram a identificar quando, onde e como os argumentos dos estudantes ocorreram. A partir dessas discussões, ficou claro que Jing teve oportunidade de reelaborar suas próprias perspectivas.

A seguir, descrevemos uma aula típica de Jing para desenvolver conjecturas para desencadeamento da argumentação. No primeiro passo, elaboração de casos, Jing preferiu solicitar que os estudantes elaborassem casos individualmente. Não foi suficiente encontrar um padrão a partir de poucos casos, porém surgiram quando as crianças formaram grupos de quatro componentes. Seguiu-se o segundo passo, quando os estudantes trabalharam individualmente para pensar em um padrão e formar conjecturas com base no conjunto de casos. É mais provável que o trabalho individual tenha conjecturas variadas, inclusive acidentais, além da antecipação do professor. As conjecturas individuais foram anotadas em uma folha de papel tamanho A3 e em seguida houve discussões em grupo para compartilhar e verificar se as conjecturas estavam corretas. Observamos que as conjecturas que os estudantes fizeram eram baseadas apenas em casos existentes, sendo verdadeiras apenas para eles e sendo, às vezes, refutados por outros estudantes neste passo. Além disso, a linguagem dos estudantes se modificava com frequência para linguagem matemática no decorrer das discussões em grupo. A seguir, Jing convidou os estudantes a mostrarem suas conjecturas no quadro e relatá-las para toda a turma.

No terceiro passo, Jing pediu que os estudantes classificassem várias conjecturas em diversas categorias. As conjecturas em cada categoria foram organizadas em sequência para validar sua fidedignidade com um caso novo. A incerteza das conjecturas em cada categoria foi verificada por casos existentes e validada por um caso novo além dos existentes. As garantias, os reforços, as refutações e os qualificadores podiam estar envolvidos no processo de validação. Para fazer com que as conjecturas levassem a conclusões-alvo, Jing perguntou aos estudantes: *A conjectura de cada um de vocês funciona para todos os casos?* Foi proposta a premissa de uma conjectura verdadeira para todos os casos. Generalizando as conjecturas provisórias, Jing perguntou aos estudantes *se as conjecturas validadas eram verdadeiras para todos os casos ou não*. Para que uma conjectura seja verdadeira é especificada uma condição especial, um qualificador, como componente da argumentação, será envolvido no passo de generalização. No passo final de justificativa, Jing pediu que seus estudantes expressassem o motivo para justificar suas conjecturas ao perguntar: *Como você convence seus amigos de que suas conjecturas sempre são verdadeiras?* O raciocínio dedutivo baseado no que o estudante individual aprendeu é comumente obtido no passo da justificativa. Garantias e reforços também podiam

estar envolvidos no passo final. Neste momento, vale a pena observar que a distinção entre argumento e argumentação foi elaborada neste estudo, sendo que os elementos incluindo dados, conjecturas/teses, garantias, reforços, refutação e qualificadores formam o conteúdo de um argumento. A argumentação é o processo de reunir os elementos.

Coleta de Dados

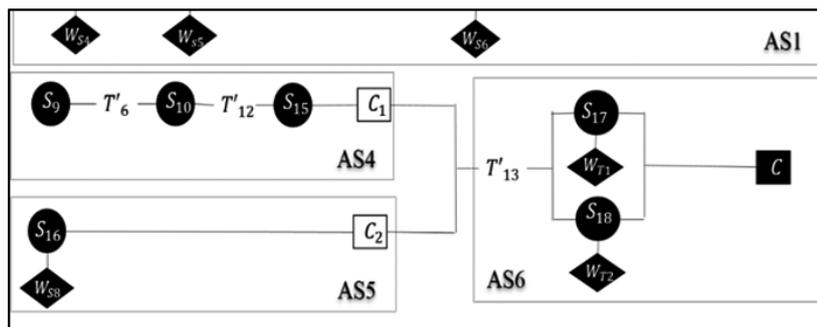
Os dados relatados no artigo consistem em seis tarefas de conjectura, doze aulas gravadas em vídeo e doze folhas de trabalho individual e em grupo dos estudantes. Seis câmeras de vídeo filmaram simultaneamente pequenos grupos individuais e em grande grupo como um todo em uma turma de cada vez. Os vídeos dos pequenos grupos foram usados para analisar as estruturas locais de argumentação.

Análise das Estruturas de Argumentação

As características e a qualidade da argumentação baseadas nas suas estruturas foram identificadas em duas etapas: (1) extração das estruturas de argumentação mediante análise de elementos dos argumentos de maneira sistemática; e (2) comparação das estruturas de argumentação extraídas das seis tarefas realizadas em sala de aula. Primeiramente, as estruturas de argumentação foram analisadas para reelaborar as sequências e os sentidos das conversas. Em segundo lugar, os argumentos e as estruturas de argumentação foram analisados. Por fim, as argumentações locais foram comparadas ao analisar e classificar as funções dos elementos, sendo que as estruturas globais de argumentação foram comparadas de acordo com as estruturas em geral.

Seis sequências de argumentação (AS_i , $i=1$ a 6), mas apenas três sequências de argumentação (AS_4 , AS_5 e AS_6) levaram à conclusão-alvo C , da qual as estruturas restantes de argumentação estavam desconectadas, conforme mostra a Figura 2.

Figura 2 – Estrutura de Argumentação do Perímetro de um Retângulo



Nota: W_i : i ésima garantia dos estudantes
 R_i : i ésima refutação dos estudantes
 T_i : i ésima intervenção da professora
 Fonte: Elaboração da autora (2017).

A Figura 2 mostra apenas uma parte das estruturas da argumentação coletiva referente ao perímetro de um retângulo no discurso da turma. As diferentes funções dos argumentos, incluindo dados, garantias, reforços e conclusões, foram representadas por símbolos diferentes (círculo, losango ou retângulo) (ver Figura 2). A refutação podia ser iniciada pelos estudantes ou pela professora (W_{T1} ou W_{S1})^{2,3,4}. Uma conclusão (C_i) pode ser provisória (retângulo branco) ou alvo (retângulo preto). A sequência de argumentos com funções diferentes forma uma *sequência* de argumentação (AS_i).

As duas conclusões provisórias, C1 e C2, tornaram-se a conclusão-alvo C na sequência AS6, que foram extraídas do seguinte excerto:

286T⁵: Este papel retangular não tem nenhum número nele. Pode me dizer por que o perímetro dividido por 2 é igual à soma do comprimento com a largura? Onde está o seu perímetro?

287S⁶: (Aponta para a margem do papel)

288 T: Apenas uma vez ao contrário? Então por que o *perímetro dividido por 2* é igual ao *comprimento mais a largura*? (T'_{13}).

289S: Quando você o divide por dois, então é isto. (Usa um dedo para indicar o lugar onde está a *soma do comprimento com a largura*) (S_{17}).

290S: Então, existem dois conjuntos (S_{17}).

291S: O perímetro dividido por 2 é igual à metade (S_{17}).

294T: Onde está a metade do perímetro? (S_{17}).

295S: A soma do comprimento com a largura.

296T: O que significa ao contrário?

297S: O comprimento mais a largura é igual à metade do perímetro, então quando você multiplica (a soma) por 2, terá o perímetro (S_{18}) (C1).

Para generalizar as duas conclusões provisórias (C_1 e C_2) (ver Figura 2), Jing esperava que os estudantes usassem uma tese em vez de numerais para descrever a maneira de encontrar a largura quando o perímetro e o comprimento fossem informados. Assim, ela entregou aos estudantes uma folha de papel A4 sem informar seu comprimento e largura como garantias (W_{T1}) e W_{T2}) (linha 286), observado no excerto abaixo. A seguir ela fez três perguntas orientadoras: (T'_{13}) (ver linhas 286, 288 e 296 abaixo) das quais resultaram duas conjecturas – *O perímetro dividido por 2 é igual à metade* (S_{17}) (linhas 289, 290 e 291) e *O comprimento mais a largura é igual à metade do perímetro, então quando você multiplica por 2, terá o perímetro* (S_{18}) (linha 297).

Análise das Características e da Qualidade da Argumentação

As características da argumentação foram codificadas de acordo com as garantias, os reforços, a refutação e a orientação da professora mostrada em uma estrutura de argumentação. Inicialmente, os estudantes de Jing não estavam acostumados a fazer conjecturas e solicitavam sua orientação. Cada componente foi classificado de 0 a 3. As ru-

bricas de cada classificação foram descritas no Quadro 2. As garantias usadas por estudantes do Ensino Fundamental não eram úteis ou eficientes, então foram classificadas em quatro níveis dependendo do grau de sua validade. A classificação mais alta corresponde à maior qualidade da argumentação. Conforme o nível de argumentação de Osborne, Erduran e Simon (2004), os argumentos que consistem em teses simples foram classificados em nível mais baixo do que aqueles consistindo em teses com dados, garantias ou reforços. Assim, os complementos de uma argumentação foram classificados dependendo da complexidade e da variedade de componentes envolvidos em estruturas de argumentação. As conjecturas/teses provisórias coletadas junto a estudantes do Ensino Fundamental com pouco conhecimento matemático não foram consideradas relevantes para conceitos ou propriedades matemáticas. A maior qualidade de conjecturas iniciais depende do grau de relevância para matemática, do uso de linguagem matemática sucinta e de sua potencialidade para levar a conclusões, como meta dos objetivos educacionais de uma aula.

Quadro 2 – Rubricas de Avaliação da Qualidade da Argumentação

Nível	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3
Componente	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3
Exatidão das garantias	nenhuma garantia	irrelevantes	plausíveis	válidas
Tipos de refutação	nenhuma refutação	referente a uma garantia	referente a mais de uma garantia	referentes a uma refutação inválida
Complementos dos componentes	apenas teses	teses + garantias	teses + garantia + reforço/refutação	teses + garantia + mais de um reforço/refutação
Validade de teses iniciais que levam a conclusão	matematicamente irrelevantes	apenas matematicamente relevantes	sem exatidão + matematicamente relevantes + generalização	exatas + matematicamente relevantes + generalização

Fonte: Elaborada pela autora (2017).

As refutações foram identificadas com quatro níveis, dependendo do uso de refutação. O nível 3, mais alto, é a refutação referente a uma refutação inválida. O uso de refutação é classificado no nível mais alto quando a refutação é usada em relação a uma refutação inválida. Envolve não apenas identificar a refutação incapaz de refutar uma garantia, mas também compreender como refutar a refutação inválida. Por exemplo, um estudante (S7) elaborou um triângulo isósceles falso com 90° , 20° e 20° ao refutar a conjectura verdadeira *A soma de um triângulo é 180°* . Sua refutação inválida foi imediatamente refutada por diversos estudantes na discussão da turma inteira. Um estudante (S20) refutou a refutação inválida com: *Os três ângulos 90° , 20° , 20° não podem formar um triângulo*.

A identificação do nível de cada componente foi seguida imediatamente pela contagem das frequências. Por exemplo, as sequências da estrutura de argumentação A4, A5 e A6 como parte da estrutura de argumentação do perímetro do retângulo na Figura 2 foram formadas por 6 conjecturas (Si), 3 das quais tinham garantias e 3 foram orientadas pela professora. Com base nas estruturas da Figura 2, a exatidão das duas garantias (W_{T1} , W_{T2}), fornecidas pela professora em vez dos estudantes, não foi contada. A qualidade de outros três componentes foi contada da mesma maneira. Para aumentar a fidedignidade da análise, cada argumentação das tarefas foi codificada por dois estudantes de pós-graduação que leram individualmente todos os excertos e depois se reuniram para comparar seus códigos e resolver suas diferenças. Finalmente, a autora juntou-se às suas análises da comparação de estruturas locais e globais de argumentação.

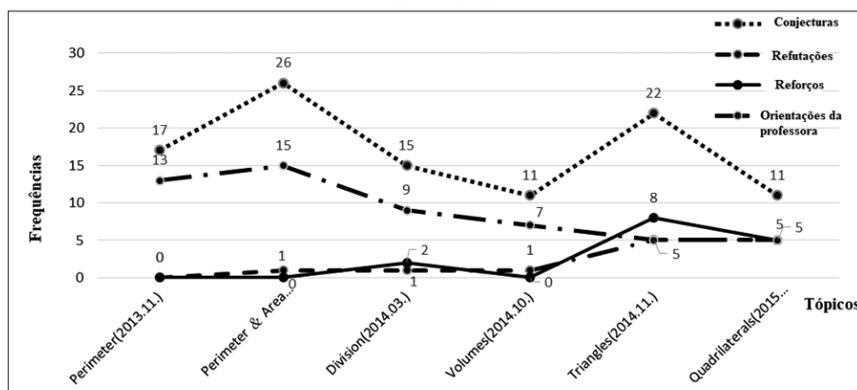
Resultados da Pesquisa

Características da Argumentação Realizada pelos Estudantes

A Figura 3 mostra as características da argumentação nos seis tópicos com quatro componentes: conjecturas, refutação, reforços e orientação da professora. Os qualificadores não foram mostrados na figura, pois apenas duas frequências foram usadas na turma de Jing.

A Figura 3 sugere três tendências. Primeiramente, o discurso de argumentação realmente ocorreu nas aulas de conjectura e tinha sido aprimorado do 3º para o 4º ano. Tanto as linhas correspondentes à frequência de refutação como de reforço aumentam do 3º para o 4º ano, por outro lado a linha referente à orientação da professora diminui. A linha que corresponde às conjecturas também aumenta do 3º para o 4º ano.

Figura 3 – Desenvolvimento das Características da Argumentação dos Estudantes



Fonte: Elaborada pela autora (2017).

Entretanto, para as conjecturas, 10/17 (58,8%), 18/26 (69,2%), 10/15 (66,7%), 8/11 (72,7%), 17/22 (77,3%) e 10/11 (90,9%) foram apoiadas pelas

garantias. A porcentagem das conjecturas com garantias aumentou de 58,8% para 70% no 3º ano e de 72,2% para 90,9% no 4º ano. Estes resultados indicaram que a habilidade dos estudantes para fazer conjecturas com garantia ao invés de sem garantia progrediu por meio de seu engajamento em conjectura. As garantias usadas pelos estudantes no 3º ano foram os exemplos que tinham elaborado, já as garantias usadas por aqueles no 4º ano foram baseadas em seu conhecimento prévio. Por exemplo, *ângulo obtuso apenas para um triângulo obtuso* foi usado pelos estudantes do 4º ano como garantia para apoiar sua conjectura de que *a soma de três ângulos de um triângulo é 180º*. Quando solicitados a explicar como formularam a conjectura $(\text{comprimento} + \text{largura}) \div 2 = \text{perímetro}$, os estudantes do 3º ano usaram um conjunto de casos na tabela (5+4,18; 1+8,18; 3+6,18) que elaboraram como a garantia.

Em segundo lugar, as linhas da argumentação na Figura 3 mostram que os estudantes tanto no 3º como no 4º ano estavam formulando conjecturas com mais frequência do que refutando conjecturas discordantes. As conjecturas formuladas por estudantes no 3º ano eram fatos triviais baseados nos numerais superficiais irrelevantes para as propriedades matemáticas, em contrapartida, aqueles do 4º ano mais aprimoraram para serem relevantes as relações ou propriedades matemáticas, mas sem uma linguagem matemática precisa para conjecturas. Um dos possíveis fatores para o progresso dos estudantes foi o questionamento da professora. Conforme observamos, foi perguntado aos estudantes *o que você descobriu em relação aos casos que elaborou?*, no começo do estudo. Isto foi seguido pelas perguntas *que relações matemáticas você descobriu em relação aos casos que elaborou?*, e *que relações matemáticas novas ou criativas você descobriu em relação aos casos que elaborou?*, no fim do primeiro semestre do 3º ano.

A Figura 3 mostra um padrão consistente de que os estudantes raramente utilizavam contraexemplos contra teses ou reforços discordantes ao defenderem suas teses com garantias. Além disso, quase não sabiam usar os reforços para apoiar suas conjecturas. Um possível motivo é que os estudantes tinham pouco conhecimento matemático em tópicos novos; isto foi evidenciado pelo uso mais frequente de reforços em apoio às conjecturas sobre triângulos e quadriláteros, que já tinham aprendido quando estavam no 3º ano.

Em terceiro lugar, as frequências da orientação da professora diminuíram entre o 3º e o 4º ano em cerca de 50% na média (ver Quadro 3). A orientação da professora era pela evocação de argumentação, revisão de conjecturas incompletas e generalização de uma conjectura para todos os casos. Por exemplo, Jing incentivava os estudantes a usarem a linguagem matemática completa para descrever a relação entre o perímetro, a largura e o comprimento de um retângulo ao perguntar aos estudantes: *Então, o que descobriram? Somem o comprimento e o comprimento, depois multipliquem por 2, isto é igual a quê?* Os estudantes conseguiam enunciar uma conjectura para todos os casos usando a quantidade universal como *para qualquer, para todos*, ou usando o termo *desde que* para uma premissa da conjectura, e o *qualificador* como um elemento de argumentação.

Quadro 3 – Funções da Orientação da Professora nos Seis Tópicos Desenvolvidos Durante Dois Anos Consecutivos

Componentes		Orientação da professora	Função		
Tópicos			Completar conjecturas	Revisar conjecturas	Evocar argumentação
			Freq. (%)	Freq. (%)	Freq. (%)
3º Ano	Perímetro (11/2013)	13	4 (30,8)	7 (53,8)	2 (15,4)
	Perímetro e Área (01/2014)	15	7 (46,7)	5 (33,8)	3 (20,0)
	Divisão (03/2014)	9	5 (55,6)	3 (33,0)	1 (11,1)
4º Ano	Volumes (10/2014)	7	4 (57,1)	2 (28,6)	1 (14,3)
	Triângulos (11/2014)	5	0 (0)	5 (100)	0 (0)
	Quadriláteros (04/2015)	5	0 (0)	4 (80,0)	1 (20,0)

Fonte: Elaborado pela autora (2017).

Qualidade da Argumentação Realizada pelos Estudantes

A qualidade da argumentação entre o 3º e o 4º ano foi identificada com as seguintes características. Primeiro, a exatidão das garantias e a completude dos componentes foram destacadas em comparação com os outros componentes (ver Quadro 4). Em segundo lugar, as argumentações dos estudantes de 3º ano não eram completas, embora conseguissem formular várias conjecturas. Identificamos quatro tipos de conjecturas ao verificar sua exatidão. As conjecturas do primeiro tipo que os estudantes do 3º ano faziam eram corretas na maioria das vezes, mas não se baseavam em casos existentes. Aquelas do segundo tipo eram ocasionalmente incorretas, mesmo se baseando em casos existentes. Aquelas do terceiro tipo eram verdadeiras para os casos existentes, mas não para todos os casos. As conjecturas do quarto tipo eram sempre verdadeiras para todos os casos, levando a conclusões.

As conjecturas que os estudantes do 3º ano formularam inicialmente não eram apoiadas por garantias e não havia refutação contra conjecturas falsas (25 frequências no Nível 1 na coluna das garantias e zero de frequência nos Níveis 2 e 3 na coluna das refutações), ao passo que as argumentações que desenvolveram no 4º ano começaram a incluir uma conjectura acompanhada por uma garantia, sendo que ambas eram relevantes para as propriedades matemáticas (37 frequências no Nível 3 na coluna das garantias).

Quadro 4 – Frequências da Qualidade da Argumentação por Ano e Nível

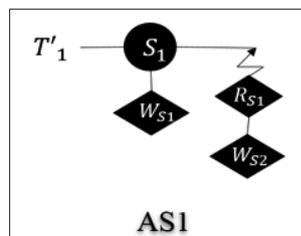
Níveis	Exatidão das garantias				Tipos de refutação				Completude dos componentes				Validade das teses iniciais			
	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
3º Ano	1	25	6	3	0	2	0	0	23	34	8	2	2	13	1	3
4º Ano	0	13	28	37	1	5	4	1	9	14	14	4	17	1	7	7
Total	1	38	34	40	1	7	4	1	32	48	22	6	19	14	8	10

Fonte: Elaborado pela autora (2017).

Os estudantes do 4º ano não apenas forneceram mais garantias, mas também garantias mais válidas do que aqueles no 3º ano (ver Quadro 4). No 4º ano, seu conhecimento prévio transformou-se na fonte de suas garantias, mas suas garantias também evoluíram para um nível plausível ou válido partindo do nível irrelevante. Isto foi evidenciado pelo aumento de 3 para 37 nas frequências da coluna de tese inicial no Nível 3 (ver Quadro 4).

O exemplo na Figura 4, uma conjectura com duas garantias e uma refutação, foi baseado no seguinte excerto de ensino no 3º ano: Jing fez uma pergunta aos estudantes (T'_1) (linha 35) para desencadear uma discussão. Uma conjectura (S_1) feita pelo Grupo 2 era que *O resto da divisão é 0*. Foi acompanhada por uma garantia (W_{S_1}) (linha 36). Entretanto, a conjectura S_1 foi imediatamente refutada pelo grupo (R_{S_1}) (linha 36). Portanto, os estudantes perceberam que a conjectura S_1 não poderia ser generalizada para todos os casos. Esta refutação não se referia à questão de a conjectura ser falsa; ao invés disto, mostrou que não poderia ser generalizada. A garantia dos estudantes para refutação era *algumas divisões de números inteiros podem ter um resto*. (W_{S_2}) (linha 40).

Figura 4 – Sequência de Argumentação ASI Extraída do Tópico da Divisão



Fonte: Elaboração da autora (2017).

- 35T: Qual das conjecturas de seus grupos não pode ser verdadeira para mais casos? (T'_1)
- 36S^B: Grupo 2. [O resto da divisão é 0. (S_1)]. (R_{S_1})
- As seis sentenças numéricas da divisão mostradas na folha de trabalho (W_{S_1}).
- 37T: O que significa *sem resto*?
- 38S: 0.
- 39T: Por que você não tem certeza de que a conjectura deste grupo é verdadeira?
- 40S: Porque algumas divisões de números inteiros podem ter um resto (W_{S_2}).

Discussão e Implicações

Relatamos os principais achados deste estudo sobre o desenvolvimento da argumentação pelos estudantes por meio da conjectura com apoio ou questionamento pela professora em uma turma que avançou do 3º para o 4º ano. Os resultados indicaram quatro características da natureza da conjectura e da argumentação na turma. Primeiro, a conjectura parecia ser uma abordagem potencialmente apropriada para desenvolver a argumentação de estudantes em turmas do Ensino Fundamental. Por exemplo, quando os estudantes se engajam no passo de generalizar as conjecturas, em geral uma divisão não necessariamente significa tornar os números menores. Quando se restringe aos números inteiros, então uma divisão deve resultar em números menores. Um qualificador está envolvido no processo de generalização.

Em segundo lugar, o discurso argumentativo foi aprimorado para argumentação entre o 3º e o 4º ano. A melhoria da argumentação incluiu as conjecturas que se modificaram para serem apoiadas por garantias e reforços a partir daquelas sem garantias; as garantias também se transformaram de não válidas em válidas. O progresso da argumentação no 3º e no 4º ano possivelmente é atribuído aos seguintes fatores: conhecimento matemático dos estudantes, experiência de argumentação e conjectura; experiência e vivência da professora; questionamento; planejamento de tarefas; conjectura como uma abordagem educacional.

O conhecimento matemático dos estudantes aumentou gradativamente do 3º para o 4º ano, e o mesmo ocorreu com sua experiência adquirida de conjectura e de argumentação por meio da prática no ensino regular. A experiência de ensinar argumentação desenvolvida por meio de exercícios desempenhou um papel fundamental no início e na manutenção da mudança de argumentação. O questionamento da professora também permitiu que identificássemos os tipos de pergunta usadas em cada passo de conjectura que permitia que a argumentação dos estudantes prosseguisse. Os resultados deste estudo foram consistentes com aqueles do estudo de Keith (2006) de que perguntar contribuía para o desenvolvimento de argumentação dos estudantes. Entretanto, *perguntar* ou os *tipos de pergunta* envolvidos neste estudo eram mais complexos, com funções diferentes do que o questionamento de Keith, apenas nos contextos de resultados corretos ou incorretos. As perguntas eram *o que você descobriu?*, *cada uma de suas conjecturas funciona para todos os casos?* e *como você convence os outros de que suas conjecturas são verdadeiras?*

Um fator marcante é a natureza das tarefas, porque as diretrizes de engajamento nas atividades de conjectura eram concretas, tangíveis e claras para incorporar as ideias essenciais de uma reforma no ensino da matemática. A natureza das tarefas permitiu que os estudantes tivessem muito tempo para aprender com casos elaborados por eles mesmos ao formularem, validarem, generalizarem e justificarem suas conjecturas. De acordo com a necessidade intelectual de Harel (2008), os estudantes tinham mais probabilidade de estar motivados por elabo-

rarem seus próprios casos do que ao usarem casos fornecidos pela professora. Isto os levou a se envolver em atividades de conjectura em que existe argumentação. As tarefas envolvidas neste estudo incorporando conteúdo matemático sem ocupar horas a mais, mas como materiais de ensino suplementares, resultaram em uma mudança na natureza do discurso na turma e diminuíram os temores da professora nos horários de aula muito exíguos. Os cinco passos da conjectura incorporados às tarefas não apenas melhoraram a argumentação dos estudantes, mas também contribuíram para resolver seus problemas existentes e resolver o risco nos livros didáticos. O risco no livro didático era que as propriedades matemáticas fossem baseadas em um ou dois exemplos de apoio e sem generalização e justificativa. Elaborar conjecturas também oportunizou que os estudantes se envolvessem em justificar suas teses usando o raciocínio dedutivo, indo além dos argumentos empíricos predominantemente usados nos livros didáticos.

Deve ser observado que os cinco passos da conjectura por meio de um conjunto finito de casos distintos como abordagem educacional desempenharam um papel fundamental não apenas para o desenvolvimento da argumentação dos estudantes, mas também para a aquisição de conhecimento pela professora para ensinar argumentação. Este estudo identificou as rubricas de níveis diferentes dos processos de argumentação do estudante que ajudam os professores a transformarem o conhecimento do processo de argumentação em um discurso da turma. O resultado deste estudo indica que as normas sociais de argumentação surgiram espontaneamente quando os estudantes se envolveram nos cinco passos da conjectura. Por exemplo, os estudantes aprenderam a organizar os casos para identificar um padrão, aprenderam a escutar e falar, aprenderam a encontrar um contraexemplo para refutar uma tese ou garantia discordante.

Em terceiro lugar, nosso trabalho procurou desenvolver tarefas docentes de conjectura incorporadas à educação matemática regular para que a argumentação ocorra. Como resultado, este estudo contribuiu para a transição da conjectura para a argumentação. As refutações referidas neste estudo não eram apenas em relação a uma conjectura incorreta e a uma conjectura não verdadeira para todos os casos, mas também em relação às garantias discordantes. Além disso, foram identificados neste estudo quatro níveis de refutação. A maioria dos estudantes do 3º ano refutou uma conjectura sem garantias, e quando ao estarem no 4º ano refutaram algumas vezes uma conjectura com garantias e reforços. Para aqueles tópicos matemáticos com os quais tinham mais familiaridade, às vezes conseguiam refutar uma refutação falsa, como ao reconhecer triângulos.

Finalmente, deve ser observado que nosso estudo contribuiu para a prova operativa usada pelos estudantes de Ensino Fundamental participantes sobre as propriedades da geometria e os padrões de números sugeridos por Wittmann (2009). Para estudos adicionais, sugerimos que os professores devem proporcionar aos estudantes oportunidades precoces para se envolverem em argumentação no ensino regular durante

todos os anos, em vez em uma intervenção de curto prazo. Nossos achados são apoiados pelo trabalho de Osborne, Erduran e Simon (2004) e de Kuhn (1991), indicando que a melhoria na argumentação em turmas de 3º e de 4º ano é possível se for explicitamente abordada e ensinada, como através de conjectura incorporado ao ensino de matemática.

Tradução do original inglês de Ananyr Porto Fajardo

Recebido em 1 de outubro de 2017
Aprovado em 3 de novembro de 2017

Notas

- 1 Agradecimentos: Este artigo é baseado no trabalho apoiado pelo Ministério da Ciência e da Tecnologia de Taiwan mediante a bolsa nº MOST 103-2517-S-134 -001 - MY3. Todas as opiniões, achados, conclusões ou recomendações expressas neste artigo são oriundos da autora e não necessariamente refletem as opiniões do MOST. A autora gostaria de agradecer a todos os professores que participaram do estudo. A autora agradece aos anônimos que fizeram sugestões para enriquecer este artigo.
- 2 Nota da Tradução (NT): A letra *W* se refere a *warrant* (*garantia* em português).
- 3 N. T.: *WTi* se refere a garantias da professora.
- 4 N. T.: *WSi* se refere a garantias dos estudantes.
- 5 N. T.: A letra *T* se refere a *teacher* (*professora* em português).
- 6 N. T.: A letra *S* se refere a *student* (*estudante* em português).
- 7 N. T.: A letra *T* se refere a *teacher* (*professora* em português).
- 8 N. T.: A letra *S* se refere a *student* (*estudante* em português).

Referências

- BARKAI, Ruth; TSAMIR, Pessia; TIROSH, Dina; DREYFUS, Tommy. Proving or Refuting Arithmetic Claims: the case of elementary school teachers. In: COCKBURN, Anne; NARDI, Elena (Ed.). **Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**: volume 2. Norwich: University of East Anglia, 2002. P. 57-64.
- CAÑADAS, María Consuelo et al. The Conjecturing Process: perspectives in theory and implications in practice. **Journal of Teaching and Learning**, Ontario, v. 5, n. 1, p. 55-72, 2007.
- CAÑADAS, María Consuelo; CASTRO, Encarnación. A Proposal of Categorisation for Analysing Inductive Reasoning. In: CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 4., 2005, San Feliu de Guixols. **Proceedings...** San Feliu de Guixols, Spain: 2005. P. 401-408.
- COMMON CORE STATE STANDARDS INITIATIVE. **Common Core State Standards for Mathematics**. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers, 2010.
- GABEL, Mika; DREYFUS, Tommy. The Flow of Proof: the example of Euclidean algorithm. In: LINDMEIER, Anke; HEINZE, Aiso (Ed.). **Proceedings of the 37th**

Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: volume 2. Kiel, Germany: PME, 2013. P. 321-328.

HANNA, Gila; VILLIERS, Michael de. **Proof and Proving in Mathematics Education:** the 19th ICMI study. Dordrecht: Springer, 2012.

HAREL, Guershon; SOWDER, Larry. Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. In: LESTER, Frank (Ed.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** Greenwich, CT: Information Age, 2007. P. 805-842.

INGLIS, Matthew; MEJIA-RAMOS, Juan Pablo; SIMPSON, Adrian. Modelling Mathematical Argumentation: the importance of qualification. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 66, n. 1, p. 3-21, 2007.

KEITH, Annie. Mathematical Argument in a Second Grand Class: generating and justifying generalized statements about odd and even numbers. In: SMITH, Stephanie; SMITH, Marvin (Ed.). **Teachers Engaged in Research: inquiry into mathematics classrooms, grades prek-2.** **Education Review**, Arizona, 2006. P. 35-68.

KIM, Sungho; HAND, Brian. An Analysis of Argumentation Discourse Patterns in Elementary Teachers' Science Classroom Discussions. **Journal of Science Teacher Education**, Auburn, v. 26, n. 3, p. 221-236, 2015.

KNIPPING, Christine. A Method for Revealing Structures of Argumentations in Classroom Proving Processes. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, Berlin, v. 40, n. 3, p. 427-447, 2008.

KO, Yi-Yin. Mathematics Teachers' Conceptions of Proof: implications for educational research. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Dordrecht, v. 8, n. 6, p. 1109-1129, 2010.

KUHN, Deanna. **The Skills of Argument.** New York: Cambridge University Press, 1991.

LIN, Pi-Jen; TSAI, Wen-Huan. Enhancing Students' Mathematical Conjecturing and Justification in Third-Grade Classrooms: the sum of even/odd numbers. **Journal of Mathematics Education**, Irvine, v. 9, n. 1, p. 1-15, 2016.

MAHER, Carolyn. Children's Reasoning: discovering the idea of mathematical proof. In: STYLIANOU, Despina; BLANTON, Maria; KNUTH, Eric (Ed.). **Teaching and Learning Proof across the Grades: a k-16 perspective.** New York: Routledge & National Council of Teachers of Mathematics, 2011. P. 120-132.

MAHER, Carolyn; MARTINO, Amy. The Development of the Idea of Mathematical Proof: a 5-year case study. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 27, n. 2, p. 194-214, 1996.

MAKAR, Katie; BAKKER, Arthur; BEN-ZVI, Dani. Scaffolding Norms of Argumentation-Based Inquiry in a Primary Mathematics Classroom. **ZDM – Mathematics Education**, Berlin, v. 47, n. 7, p. 1107-1120, 2015.

MASON, John; BURTON, Leone; STACEY, Kaye. **Thinking Mathematically.** Boston: Addison-Wesley, 1987.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and Standards for School Mathematics.** Reston, VA: NCTM, 2000.

OSBORNE, Jonathan; ERDURAN, Sibel; SIMON, Shirley. Enhancing the Quality of Argument in School Science. **Journal of Research in Science Teaching**, New York, v. 41, n. 10, p. 994-1020, 2004.

- PEDEMONTE, Bettina. How Can the Relationship between Argumentation and Proof be Analyzed? *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, v. 66, n. 1, p. 23-41, 2007.
- PÓLYA, George. **Mathematics and Plausible Reasoning**. 2. ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1968.
- REID, David; ZACK, Vicki. Aspects of Teaching Proving in Upper Elementary School. In: STYLIANOU, Despina; BLANTON, Maria; KNUTH, Eric (Ed.). **Teaching and Learning Proof across the Grades: a k-16 perspective**. New York: Routledge; National Council of Teachers of Mathematics, 2011. P. 133-145.
- SCHIFTER, Deborah. Representation-Based Proof in the Elementary Grades. In: STYLIANOU, Despina; BLANTON, Maria; KNUTH, Eric (Ed.). **Teaching and Learning Proof across the Grades: a k-16 perspective**. New York: Routledge & National Council of Teachers of Mathematics, 2011. P. 71-86.
- STYLIANIDES, Gabriel. Reasoning-and-Proving in School Mathematics Text-books. **Mathematical Thinking and Learning**, Mahwah, v. 11, n. 4, p. 258-288, 2009.
- STYLIANIDES, Andreas; BIEDA, Kristen; MORSELLI, Francesca. Proof and Argumentation in Mathematics Education Research. In: GUTIÉRREZ, Ángel; LEDER, Gilah; BOERO, Paolo (Ed.). **Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: the journey continues**. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, 2016. P. 315-351.
- STYLIANIDES, Gabriel; STYLIANIDES, Andreas; PHILIPPOU, George. Pre-service Teachers' Knowledge of Proof by Mathematical Induction. *Journal of Mathematics Teachers Education*, Dordrecht, v. 10, n. 3, p. 145-166, 2007.
- STYLIANOU, Despina; BLANTON, Maria; KNUTH, Eric (Ed.). **Teaching and Learning Proof across the Grades: a k-16 perspective**. New York: Routledge; National Council of Teachers of Mathematics, 2011.
- TOULMIN, Stephen. **The Uses of Argument**. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1958.
- WITTMANN, Erich. Operative Proof in Elementary Mathematics. In: LIN, Fou-Lai; HSIEH, Feng-Jui; HANNA, Gila; VILLIERS, Michael de (Eds.). **Proof and Proving in Mathematics Education: ICMI study 19 conference proceedings: volume 2**. Taipei: Taiwan Normal University, 2009. P. 251-256.
- YACKEL, Erna; HANNA, Gila. Reasoning and Proof. In: KILPATRICK, Jeremy; MARTIN, Gary; SCHIFTER, Deborah (Ed.). **A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003. P. 22-44.

Pi-Jen Lin é professora do *Graduate Institute of Mathematics and Science Education*, Tsing Hua University of Taiwan. Foi membro de comitês do programa internacional do Grupo Internacional de Psicologia da Educação Matemática (PME).
E-mail: linpj@mx.nthu.edu.tw

Este é um artigo de acesso aberto distribuído sob os termos de uma Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional. Disponível em: <<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>>.