A PROPÓSITO DO "ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT"

João Eduardo R. Villalobos

Há quem defenda — e não são poucos — o que chamaríamos de uma didática da ataraxia, isto é, uma forma de ensinar que se deveria limitar aos recursos capazes de tranqüilizar o estudante, devolvendo-lhe ou garantindo-lhe aquela placidez só possível nos espíritos libertos de quaisquer dúvidas mais sérias. De fato, contamos já com maravilhosas descobertas pedagógicas que, apoiadas em requintada tecnologia, permitem que a instrução seja programada de forma a só proporcionar conteúdos tidos por indiscutíveis, a serem automaticamente devolvidos pelo aluno após a devida fixação do competente esquema S-R.

O anti-socratismo pedagógico a que nos referimos (ou seria uma espécie de pirronismo às avessas?), costuma tornar-se particularmente interessante quando, por diferentes circunstâncias, acentua-se a necessidade de clamarmos por valores impostos, ou seja, quando a única solução que nos parece viável para agudas questões morais e sócio-políticas residiria na atuação de algum ditador onisciente, a quem competiria dissolver, pela força que fosse, todas as perplexidades humanas, começando por desestimular nas escolas o florescimento de personalidades afeitas às perguntas. E esquecendo que a dignidade humana deveria ser sempre prioritariamente considerada em nossos modos de ensinar, poderíamos obter, em compensação, um certo grau de felicidade geral, imparcialmente distribuída entre todos por uma educação daquele tipo.

É bem verdade que um gênero inteiramente programado de instrução, sobre contribuir para o sossego coletivo, poderia, entretanto, servir de obstáculo para o desenvolvimento do espírito científico. Em certo sentido, a própria ciência deixaria de ser ensinada, limitando-se a escola apenas à transmissão de técnicas já consagradas, suficientemente boas para manter o padrão de conforto a que muitos já se acostumaram e também legitimamente reivindicado pelos que ainda não lograram usufruir, na escala desejável, dos bens de consumo gerados pela moderna tecnologia. Efetivamente, como é sabido, a ciência se alimenta de problemas e nenhum cientista que se respeita apresenta qualquer conclusão como se fosse definitiva. Assim sendo, quando a aspiração é a de um mundo despido de problemas morais e intelectuais, a melhor solução seria, se não a radical supressão do próprio mundo humano, ao menos um sistema educacional que, servindo a objetivos sócio-políticos perfeitamente definidos por algum iluminado partido, liquidasse com todas as dúvidas e substituísse as interrogações possíveis por respostas finais.

Como já foi assinalado, certas circunstâncias podem acentuar em todos nós, e sobretudo nos jovens, o desejo não inteiramente inumano de submissão à palavra indiscutível de quem quer que se encarregue de nos chefiar, pois a ataraxia, a afasia e mesmo a "apatéia" dos estóicos (deixemos de lado a solução da morte) podem surgir como únicas saídas viáveis para a desesperança. Quando esse processo repercute na escola, porém, o mais atingido costuma ser o professor de ciências humanas, especialmente aquele que ainda não abriu mão do direito de julgar por conta própria os problemas inerentes à condição humana. Se o professor insiste em analisar, discutir ou por em dúvida as soluções de praxe, é comum o estudante desesperar-se e solicitar do mestre somente soluções, nunca problemas. E nem sempre é fácil explicar que as ciências humanas (se de fato já são ciências) são especialmente complicadas, interferindo em seus resultados, com enorme freqüência, todo tipo de preconceitos, projeções, motivos mais ou menos ocultos, racionalizações, aspirações mal confessadas e assim por diante.

Mais difícil, contudo, é fazer o aluno compreender que, se o estado geral de incerteza é bem mais visível no campo das ciências humanas, isto não significa que outros setores do saber científico, ditos mais exatos, estejam imunes às perplexidades, aos insolúveis, aos indecidíveis. Ao contrário, dado o volume das coisas ignoradas ou mal sabidas em todos os ramos da ciência, mais correto seria concluir-se que essa situação é inerente à própria atividade científica e que simplesmente não haveria qualquer ciência se não houvesse o que procurar, se não houvesse, em razão da natureza humana, espanto, dúvida, curiosidade e ignorância. E a diferença mais perceptível entre as ciências humanas e outras consideradas mais conspícuas como a Matemática e a Física, por exemplo, é que aquelas, sobre não terem desenvolvido ainda métodos rigorosos de investigação (não sabemos se em razão de sua juventude ou da própria natureza do objeto investigado), são muito mais suscetíveis de interferências subjetivas, pois somos nós mesmos os estudados.

De qualquer forma, acreditamos que o conhecimento de alguns fatos da história das ciências, especialmente daquelas que costumam receber a equívoca denominação de "exatas", é bastante sugestivo para que se leve o educando a perceber que qualquer ciência é sempre um mar de incertezas, de questões não resolvidas, de pontos obscuros, de teorias divergentes e mesmo contraditórias, isto para não se mencionar, shakespeareanamente, tudo o que pode haver entre o céu e a terra e do qual nossa inteligência nem sequer suspeita. E mais desejável ainda é que o aluno, desde muito cedo, sinta que a ciência existe como um "premio da dor", isto é, como a resposta sempre procurada e sempre fugidia, procura que se faz porque estamos vivos e não sabemos por quê e para quê, porque temos um universo diante de nós sem saber o que é.

* * *

A Matemática também se nutre de incertezas e por isto progride sempre. Mas houve um momento de sua história recente no qual, finalmente, pareciam dissipar-se todas as grandes dúvidas. Referimo-nos à ocasião em que, depois da obra pioneira de um Boole, de um Frege ou de um Peano, Russell e Whitehead, de um lado, Hilbert, de outro, deram a impressão de ter atingido o objetivo traçado por Frege, qual seja, "uma ininterrupta exigência de precisão no processo de demonstração e a máxima exatidão lógica, juntamente com a clareza e a brevidade".

De fato, sem entrarmos aqui nas distinções muitas vezes preciosas que podem ser feitas entre determinadas tendências que caracterizam a lógica matemática desenvolvida neste século, o certo é que, até certa altura desse progresso, tudo indicava a possibilidade de chegar-se àquele "algoritmo total" idealizado por Frege, o que permitiu a Hilbert declarar, em 1923, que "tudo o que integra a Matemática no sentido até agora aceito está rigorosamente formalizado" (1). O mesmo Hilbert, porém, reconheceu que, em nome da segurança da própria Matemática, fazia-se necessário o surgimento de uma Metamatemática cuja linguagem, mais qualitativa e resultante da aplicação de "inferências intuitivas", permitiria demonstrar a não-contradição dos axiomas, de tal forma que as intelecções obtidas mediante processos metamatemáticos e referentes à demonstrabilidade e não-contradição dos sistemas formais da matemática corrente "é que deveriam considerar-se como as verdades absolutas".

O programa de Hilbert quanto à constituição de uma Metamatemática com fundamentos intuitivos já constituía uma afronta às pretensões de logicistas e formalistas (2). Gödel, entretanto, em seu famosíssimo trabalho de 1931, introduziu uma questão de envergadura bem maior, destinada a causar grande comoção nos meios matemáticos, sobretudo porque frustrava pela raiz esperanças nutridas desde fins do século passado, quais sejam, as de que, finalmente, um conjunto logicamente articulado de alguns axiomas e regras de inferências (Gödel referiu-se especialmente aos grandes sistemas formais dos "Principia Mathematica" e de Zermelo-Fraenkel) seriam suficientes para resolver todas as questões matemáticas que se podem expressar totalmente formalizadas nos sistemas formais. Utilizando-se de recursos propiciados pela Metamatemática, o referido matemático demonstrou que, naqueles sistemas, há problemas até relativamente simples que não podem ser resolvidos em seu interior, isto é, a partir de seus axiomas, mostrando também que tal fato não se deve à natureza especial deste ou daquele sistema mas é comum a uma ampla gama de sistemas formais.

---

(1) Já em 1899, em seu célebre trabalho sobre os fundamentos da geometria, Hilbert manifestara a convicção de que seria possível "escolher para ela um conjunto *completo* e *simples* de axiomas *independentes*", visando ao desenvolvimento lógico dos mais importantes teoremas geométricos.

(2) A propósito do intuicionismo de H. Poincaré, escreveu B. Russell, por exemplo, que "nenhum apelo ao senso comum ou à 'intuição', ou a nada exceto a lógica estritamente dedutiva é necessário em Matemática depois que as premissas tenham sido assentadas".

O que Gödel conseguiu provar, em síntese, é a existência de proposições no sistema dos "Principia" que afirmam sua própria indemonstrabilidade. Assim, da observação de que uma proposição afirma sua própria indemonstrabilidade, segue-se que é verdadeira pois é efetivamente indemonstrável, de onde se retira a curiosa conclusão segundo a qual uma proposição, indecidível no sistema PM, resolve-se mediante considerações metamatemáticas, considerações que levam a resultados surpreendentes no tocante às provas de não-contradição dos sistemas formais.

A citada prova de Gödel, que não deixa de lembrar certas dificuldades lógicas e gnoseológicas apresentadas por Platão em seu "Parmênides" (132 a-b, isto é, o problema do "terceiro homem" segundo a apresentação de Aristóteles) e depois por Leibniz (p. ex., "Monadologia", prop. 37: "a razão suficiente ou final deve ser exterior à seqüência ou série de particulares contingentes, quão infinita possa ser a série"), a prova de Gödel, dizíamos, é suficiente para revelar até que ponto a mais "exata" das ciências pode envolver-se em grandes dificuldades e até que ponto submete-se ao processo das demais ciências, ou seja, a um processo contínuo de conquistas sempre revistas, onde novos problemas nunca deixam de aparecer, num incessante desafio à inteligência humana e numa lição perene de humildade oferecida a essa mesma inteligência.

* * *

A história de um teorema particular, a do famoso "último teorema de Fermat", que apresentaremos a seguir com um pouco mais de pormenores, talvez signifique o mais espantoso acontecimento em toda a história da Matemática e parece-nos excelente para evidenciar tanto a agudeza do espírito humano quanto seus limites, pois nos revela claramente as virtudes e as insuficiências desse mesmo espírito e, mais do que isto, o que pode fazer pelo progresso da ciência a mente que sempre investiga, nunca satisfeita consigo mesma e nunca esquecida de que a ciência, longe de ser um conjunto de resultados acabados é, essencialmente, um processo que se inicia pela dúvida e termina pela dúvida, embora seja um "pálido clarão", na feliz imagem de Poincaré, o único de que verdadeiramente dispomos.

Foi à margem de sua cópia de um texto de Diofantos (3) que Fermat (c. 1637) fez a sua célebre afirmação, destinada a desencadear um pro-

(3) Matemático Alexandrino (secs. III-IV A. D.). É a seguinte a proposição deste matemático à margem da qual Fermat escreveu as conhecidas palavras ("Arithmetica", II, 8): "Dividir um número quadrado em dois quadrados. Seja o quadrado 16 e x^2 um dos quadrados requeridos. Logo, $16 - x^2$ deve ser igual a um quadrado. Tome-se um quadrado da forma $(mx - 4)^2$, sendo m um inteiro e 4 o número que é a raiz quadrada de 16: por ex., tome-se $(2x - 4)^2$ e equacione-se esta expressão com $16 - x^2$. Assim, $4x^2 - 16x + 16 = 16 - x^2$, ou $5x^2 = 16x$, e $x = 16/5$. Os quadrados requeridos são, portanto, 256/25, 144/25 (Paráfrase de T. L. Heath, "Diophantus of Alexandria", Cambridge, 1910). A investigação da teoria Diofantina dos números tornar-se-ia assunto de trabalho de grandes matemáticos como Viète, Fermat, Lagrange e Gauss, entre outros, e haveria de balizar o processo de surgimento da moderna teoria dos números.

cesso na história da Matemática que já dura mais de três séculos: "Por outro lado, é impossível dividir um cubo em dois cubos, ou um biquadrado em dois biquadrados, ou, em termos gerais, qualquer potência, exceção feita a um quadrado em duas potências com o mesmo expoente. Descobri uma prova verdadeiramente notável, mas esta margem é muito pequena para contê-la".

Dedicado à carreira das leis, mas matemático de imenso talento, Fermat não primava em matéria de organização e, freqüentemente, limitava-se a anunciar suas descobertas sem dar-se ao trabalho de apresentar qualquer demonstração. Várias "notas marginais" do gênio francês criaram problemas que só mais tarde seriam resolvidos por outros eminentes matemáticos, forçados estes a recriar as provas não oferecidas ou perdidas. Não há motivos de qualquer ordem para duvidar-se da veracidade de Fermat e de seu talento, pois as provas que efetivamente apresentou para questões difíceis e os inúmeros trabalhos por ele realizados no campo das matemáticas situam-no como um dos mais brilhantes cientistas de todos os tempos, e pode atribuir-se a ele, também, a glória de ter antecipado a geometria analítica de Descartes e o cálculo de Newton. Em face dessas circunstâncias, restariam apenas duas hipóteses, a primeira não sujeita à prova, a segunda ainda aguardando verificação: Fermat ter-se-ia enganado ao julgar que encontrara a demonstração; o teorema de Fermat é insolúvel.

O enunciado do teorema de Fermat, contudo, é bastante elementar, embora o problema do possível reencontro de sua solução tenha desafiado a inteligência de grandes matemáticos, em mais de 300 anos de pesquisa sempre frustrada: *não existem inteiros x, y e z, todos diferentes de zero, que satisfaçam $x^n + y^n = z^n$, sendo n qualquer inteiro maior que 2.* (1).

O teorema foi provado por Fermat para $n = 4$ e por Euler (1770) para $n = 3$ (embora a demonstração deste último contivesse uma imperfeição, mais tarde corrigida por outros matemáticos). Tais demonstrações consistem em mostrar-se que, sendo possível a determinação de três valores inteiros de x, y e z que satisfaçam a equação, então será possível encontrar três outros inteiros menores que também a satisfaçam: mas por este processo verifica-se que a equação deve ser satisfeita por três valores que claramente não a satisfazem. Este método, contudo, é inaplicável para o caso geral. Se Fermat logrou efetivamente encontrar a solução correta para o caso geral, ele só o fez mais tarde. Presumindo-se que um número pode equivaler ao produto de potências de primos de uma e única maneira, uma determinada prova poderia ser oferecida, e é conjecturalmente possível que Fermat tenha partido de tal suposição. Ela é verdadeira para inteiros reais, mas não é necessariamente verdadeira para inteiros algébricos, definindo-se um inteiro algébrico como a raiz de uma equação algébrica $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, cujos coeficientes a são inteiros aritméticos (p. ex., $a + b\sqrt{-m}$, onde a, b e m são inteiros aritméticos, é um inteiro algébrico). Desta forma, admitindo-se o uso destes inteiros generalizados, *21* pode ser expresso de três formas como o produto de primos, a saber, de *3* e *7*, ou dt $4 + \sqrt{-5}$ e $4 - \sqrt{-5}$, ou de $1 + 2\sqrt{-5}$ e $1-2\sqrt{-5}$. De maneira análoga, existem valores de n para os quais a equação de Fermat conduz a expressões que podem ser fatoradas de mais de uma forma.

Demonstrado o caso (1) para $n = 4$ e $n = 3$ (Fermat e Euler), é fácil ver-se que, para a solução do caso geral, seria suficiente provar-se a impossibilidade de $x^p + y^p + z^p = 0$, sendo x, y e z inteiros não iguais a zero para qualquer primo p maior que 3. (2).

Quanto ao caso (2), Legendre e Lejeune-Dirichlet demonstraram-no para p = 5 (1823), e em 1840 Henri Lebesque logrou encontrar uma prova para p = 7. Outros esforços, contudo, realizados por matemáticos de grande talento, deram em nada. Assim ocorreu, por ex., com Gabriel Lamé e Augustin Cauchy, cujos resultados para o caso (2) fundamentaram-se em presunções que depois se mostraram falsas. Tais erros, porém, serviram de forte estímulo para as investigações de outros matemáticos igualmente ilustres que, se não puderam encontrar uma solução geral (como até hoje não se encontrou), conseguiram dar um extraordinário impulso tanto no campo da teoria dos números quanto no tocante à descoberta de novos e fecundos recursos metodológicos, ao mesmo tempo em que iam surgindo soluções parciais para o último teorema de Fermat.

Erros cometidos por matemáticos como Cauchy foram investigados por Ernst Kummer, fato que o levou à invenção dos números ideais, uma das mais ricas noções já introduzidas na Matemática. Com base em tal noção, Kummer conseguiu demonstrar (1850) que o caso (2) é impossível em inteiros x, y e z, diferentes de zero, para todos os primos p maiores que 2 e que não figuram nos numeradores dos 1/2 (p-3) números primos de Bernoulli (primos deste tipo são chamados regulares). Prosseguindo suas investigações nessa linha, Kummer descobriu que os únicos primos abaixo de 100, não regulares, são 37, 59 e 67 (e entre 100 e 166, apenas 101, 103, 131, 149 e 157). Finalmente, com base em três suposições concernentes à natureza do campo algébrico, o mesmo matemático concluiu que elas são satisfeitas para $p = 37$, 59 e 67 e, portanto, que o caso (2) é impossível para todos os primos menores que 100.

Estendendo o método de Kummer, Harry S. Vandiver (1929-39) obteve um certo número de condições que devem existir quando o caso (2) é satisfeito, condições que, aplicadas por seus colaboradores, propiciaram a descoberta de que o caso (2) é impossível para todos os primos p menores que 619.

Quanto aos resultados mais recentes, o problema pode separar-se em dois casos. Se x, y e z são primos entre si e primos também em relação a p, temos o caso I do último teorema de Fermat; se x, y e z são primos entre si e um deles é divisível por p, temos o caso II do mesmo teorema. Embora se possa presumir que o caso I seja verdadeiro, até hoje não se conseguiu prová-lo, mas certas conquistas parciais foram feitas. Assim é que Leonard Dickson, utilizando-se do teorema de Germain, demonstrou (1908) que o caso I é impossível para todos os primos menores que 7.000. B. Rosser (1939-41), levando mais avante pesquisas efetuadas por matemáticos como F. Pollaczeck e T. Morishima e valendo-se de um novo método analítico, provou que o caso I não se sustenta para qualquer primo p menor que 41.000.000; e Derrick H. e Emma Lehmer estenderam depois este resultado para p menor que 253.747.889. Fundamentado sobretudo numa idéia devida a Howard Mitchell, Vandiver demonstrou (1944) que se c é um dado inteiro par não divisível por 3 e se é possível definir dois primos p e q tais que $q = 1 + cp$, p maior que c e q maior que $3\,\varphi(c)$, então o caso (2) é impossível em inteiros com x, y e z primos de P. Aqui, $\varphi(c)$ é o número de inteiros positivos maiores que c e primos em relação a c. Os critérios empregados pelos Lehmer e por Vandiver foram testados depois por um computador digital e mostrou-se por esse processo (1954-5) que o último teorema de Fermat é verdadeiro para todos os expoentes menores que 4.002 no caso (1).

As conquistas quanto ao caso II, até inícios da década de 60, foram bem menores. De qualquer forma, o que mais importa na história do enigmático teorema de Fermat é o fato de que as heróicas tentativas feitas para resolvê-lo globalmente conduziram a uma respeitável quantidade de descobertas notáveis no campo da teoria dos números e à invenção de ricos processos de análise. Este capítulo curiosíssimo da história das matemáticas mostra até onde o não-saber, o incerto, o duvidoso e até mesmo o insolúvel podem transformar-se em estímulo fundamental para a realização de fecundos itinerários intelectuais. História que encerra, certamente, mais um expressivo exemplo para todos os teóricos da educação que se deixam atrair por métodos de ensino que, a serviço de certas "facilidades", ao invés de criar no educando o permanente espírito de dúvida, de estimular a inteligência sempre aberta para o problemático, o misterioso, o enigmático, pretendem gerar em seu espírito aquela tranquilidade que só a submissão ao dogma pode produzir, estado este que, no caso limite, identifica a ataraxia humana (para usar uma feliz comparação feita por Nietzsche) com aquela placidez própria de uma vaca sadia ruminando.

Circula hoje em dia entre matemáticos a seguinte anedota: certo matemático de fama, impressionado com o enigma representado pelo último teorema de Fermat mas preocupado com questões acadêmicas oficialmente mais sérias, só tenta resolvê-lo à noite debaixo das cobertas, para que a mulher não perceba o que está fazendo. Dir-se-ia, a propósito, que há no cientista verdadeiramente criativo uma certa dose de "loucura", da qual se envergonha muitas vezes, mas ingrediente indispensável para o progresso da ciência. Enquanto existirem esses "marginais" certamente ainda haverá esperança de que o espírito científico jamais morra, surja ou não uma nova barbárie.

REFERÊNCIAS

1. Ball, W. W. Rouse, *A Short Account of the History of Mathematics,* MacMillan, London, 1927.
2. Bochenski, I. M. *História de la Lógica Formal,* Gredos, Madrid, 1966, trad. de Millán B. Lozano.
3. Cohen, M. and Drabkin, I. E., *Source Book in Greek Science,* McGraw-Hill, 1948.
4. Frege, G., *The Foundations of Arithmetic,* Blackwell, Oxford, 1950, trad. de J. L. Austin.
5. Hilbert, D., *The Foundations of Geometry,* Open Court Publ. Comp., Illinois, 1950, trad. de E. J. Townsend.
6. Russell, B., *Introduction to Mathematical Philosophy,* G. Allen and Unwin, 1953.
7. Struik, Dirk J., *A Concise History of Mathematics,* N. Y., 1948.
8. Verbetes "Diophantos" e "Fermat's Last Theorem" respectivamente em "Der Kleine Pauly", 1967, e "Encyclopaedia Britannica", 1968.